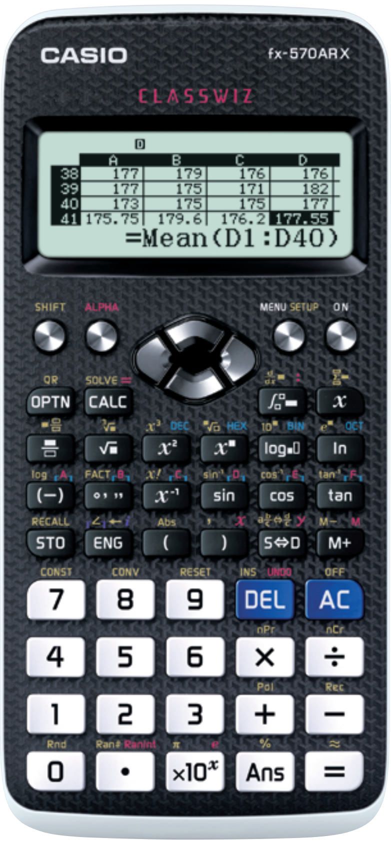
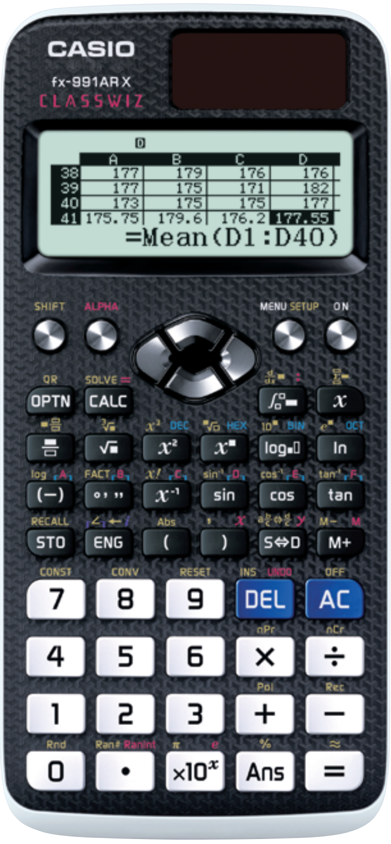
CASIO

تعلّم الرياضيات مع ClassWiz



fx-570AR X



fx-991AR X

Barry Kissane

CLASSWIZ

Support Classroom with Technology

CASIO Worldwide Education Website

http://edu.casio.com

Reliable & Durable

مقدمة

منذ أكثر من أربعين سنة، تطورت الآلة الحاسبة العلمية من كونها جهاز للحساب مخصص للعلماء و المهندسين لتصبح آداة تعليمية مهمة جداً. ما قد بدأ على شكل آداة للإجابة على الأسئلة الحسابية قد تطور لتصبح بيئة قوية، مرنة، و متاحة للطلاب و الأساتذة ليقومو باستكشاف عدد كبير من الأفكار و العلاقات الرياضية.

التطور الذي حصل على الآلة الحاسبة العلمية في السنوات الأخيرة،بالإضافة الى نصائح الأساتذة و المعلميين ذوي الخبرة، تم وضعه في جهاز واحد على شكل آلة حاسبة علمية متقدمة هي كاسيو fx-991ARX ClassWiz و fx-570ARX ClassWiz التي تحتوي على قدرات حسابية عالية المستوى، وتتضمن ميزات جديدة كجداول البيانات، واستعمال العرض الطبيعي للتدوين الرياضي بشكل واسع النطاق.

يحتوي هذا الكتاب على سلسلة من الوحدات لتساعد في أستغلال كل الفرص في تعلم الرياضيات. سيكون التركيز من خلال هذه الوحدات على عملية أستخدام ClassWiz في تطوير فهم الطلاب للمفاهيم و العلاقات الرياضية،كجزء لا يتجزأ في اطار تطوير المفاهيم الرياضية للطلاب.

في حين ان ClassWiz تلبي احتياجات الطلاب الحسابية في جميع مراحل الدراسة الثانوية، و ما بعدها،يمكن استخدامها بشكل مميز من قبل الطلاب لدعم تعليمهم الأولي للمفاهيم الرياضية المعنية. هذه الآلة الحاسبة ليست فقط مجرد آلة لحل أو التحقق من العمليات الحسابية،بعد استيعاب المفاهيم الرياضية .

تضم الرياضيات في هذه الوحدات مجموعة واسعة من المفاهيم الحسابية التي تدور منذ البدء في المرحلة الثانوية و حتى سنوات التخرج من الجامعة، من أوائل الأفكار في الأرقام و الجبر و الحساب إلى دراسة التفاضل و التكامل، والإحتمالات و الإحصاء. وتتضمن أيضاً، مواضيع متقدمة كالمتجهات، والمصفوفات و الأعداد المركبة. أتوقع أن القارىء سيختار أي وحدة من الوحدات تلبي حاجاته. على الرغم من أن مناهج الرياضيات تختلف حسب البلد، و لكن أنا متأكد من أن الأفكار الحسابية المتضمنة في هذه الوحدات ستكون مكان أهتمام لأساتذة الرياضيات و طلابهم في جميع الدول.

النص الموجود في كل وحدة من الوحدات موجه للقراءة لكل من الأساتذة و الطلاب، لفهم كيفية عمل ClassWizو ارتباطها بمناحي الرياضيات المختلفة، و أيضاً لمساعدتهم في استخدامها بشكل فعال. في كل وحدة من الوحدات ستجد مجموعة من التمارين التي تركز على مهارات استخدام الآلة الحاسبة المتعلقة بالمفاهيم الرياضية لكل وحدة. بالأضافة، تمت الى مجموعة من النشاطات التوضيحية لكل وحدة لتمثيل و إيضاح بعض الطرق لأستخدام الآلة الحاسبة في اسكتشاف الأفكار الرياضية، هذه النشاطات ليست شاملة بطبيعتها و أتوقع أن باستطاعت الأساتذة تطوير نشاطات شبيهة تناسب طلابهم. فقرة "ملاحظات من اجل المعلمين" في كل وحدة تقدم أجوبة عن التمارين التي سبقت، و أيضاً بعض النصائح حول كيفية استخدام تلك النشاطات في الصف الدراسي (وبعض الأجوبة حيثما كان ذلك مناسباً). يمكن تعديل هذه النشاطات لأغرلض تعليمية فقط (غير تجارية).

المعلومات الموجودة في العديد من هذه الوحدات تعتمد بشكل كبير على المواد المطورة سابقاً من قبلي وقبل ماريان كيمب، لقد صقلنا ووسعنا هذه المعلومات للإستفادة من الخواص الفريدة للآلة الحاسبة ClassWiz. أنا ممتن لشركة كاسيو لما أظهرته من دعم كبير في تطوير هذه المواد العلمية و أقدر المساعدة المقدمة من السيد يوشينو في خلال عملية التطوير, ومن السيد ربيع الحلبي على التدقيق اللغوي الدقيق في تصحيح الأخطاء المطبعية.

أنا أتمنى من مستخدمين هذه المواد أن يستمتعوا باستخدام الآلة الحاسبة بنفس المستوى التي استمتعت به أنا في عملية تطوير المواد العلمية هذه و أتمنى للأساتذة وطلابهم مشاركة مثمرة في تعلم الرياضيات عن طريق استخدام Classwiz.

باري كيساين

جامعة موردوخ – أستراليا الغربية

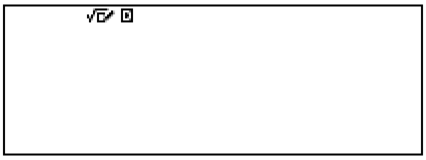
المحتويات

الوحدة الأولى
مقدمة عن الآلة *ClassWiz*

تملك الآلة الحاسبة كاسيو *ClassWiz* العديد من المزايا المفيدة المتعلقة بممارسة وتعلم الرياضيات. سنقوم في هذه الوحدة بشرح العمليات الأساسية للآلة الحاسبة وذلك من أجل مساعدتك على استخدامها بأكبر فاعلية ممكنة.

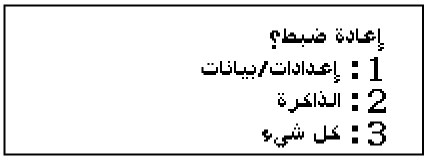
أوامر الإدخال والتحرير

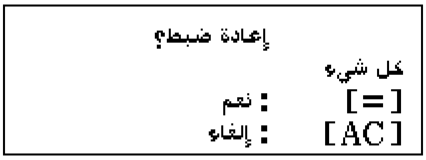
سنبدأ مع بعض العمليات الحسابية. بعد الضغط على مفتاح [ON]، اضغط على [MENU] [1] للدخول في وضعية الحساب (Calculate Mode). ستكون الشاشة فارغة وجاهزة لإجراء العمليات الحسابية وذلك كما هو مبين أدناه.

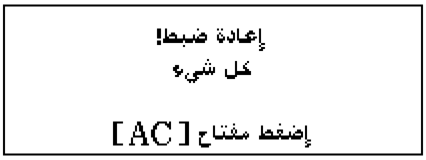


من المفيد دوماً الإنتباه لأوضاع إعدادات الآلة الحاسبة عند استخدامها. لاحظ ظهور رمزين صغيرين في السطر العلوي من الشاشة وذلك حتى من دون إدخال أي عمليات حسابية. يُبين لك الرمز D أن الآلة الحاسبة تفترض قياس الزوايا بالدرجات، في حين يُبين لك الرمز الآخر بأنه جرى إعداد الآلة الحاسبة من أجل قبول وعرض العمليات الحسابية بالصيغة الرياضية الطبيعية (الموصوفة من قبل الآلة الحاسبة بأنه الوضع الرياضي (*Math* Mode))

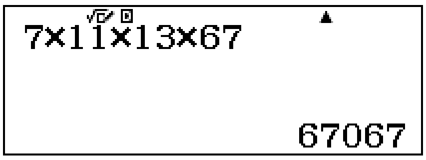
يمكن تغيير كل إعداد من هذه الإعدادات كما سنوضح أدناه. إذا كانت شاشة الآلة الحاسبة الخاصة بك تبدو مختلفة عما هو موضح هنا، من المحبذ إعادة ضبطها (reset) في الوقت الراهن وذلك حتى تعتاد على كيفية تغيير الإعدادات. قم بالنقر على مفتاح [SHIFT] متبوعا بالمفتاح [9] (لا تضغط بشكل مطول على المفتاح [SHIFT]) وقم باتباع التعليمات من أجل إعادة ضبط الآلة عبر النقر على المفتاح [3] وذلك كما هو مبين أدناه.

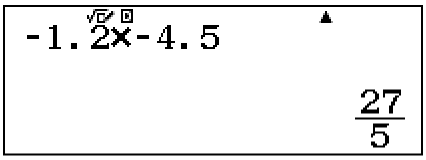




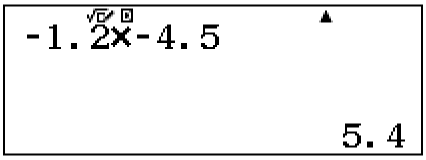


يمكن إدخال العمليات الحسابية بشكل مباشر إلى الشاشة عبر سطر الأوامر، ومن ثم الضغط على زر [=] لإنهاء العملية الحسابية. إليك المثالين التاليين:

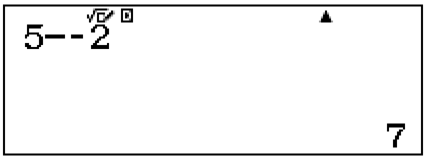




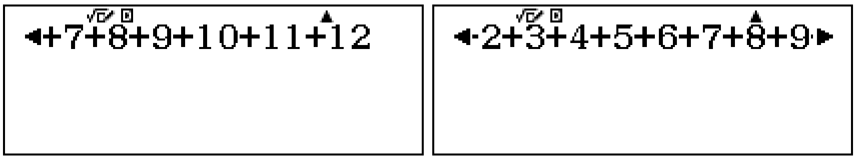
لاحظ في المثال الثاني أن النتيجة تظهر ككسر. يمكنك تحويلها إلى عدد عشري إذا أردت عن طريق النقر على مفتاح [S⇔D] (التحويل من قياسي إلى عشري). أما الحل البديل فهو النقر على مفتاح [SHIFT] قبل النقر على [=] الأمر الذي سيؤدي إلى عرض النتيجة بصورة عشرية فورا (كما هو موضح بالرمز ≈ فوق مفتاح [=]).
لاحظ عدم عرض أي خانات عشرية لا لزوم لها: أي يجري عرض النتيجة على أنها 5.4 وليس 5.40 والتي يحصل عليها الطلاب أحيانا من الطرق الحسابية التي يجرونها يدويا.



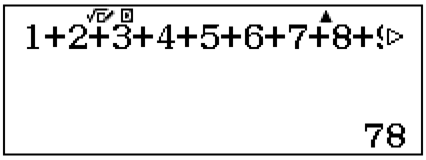
يجب استخدام المفتاح (−) لإدخال الأرقام السالبة وذلك كما هو موضح في الشاشة أعلاه، واستخدام مفتاح − من أجل الطرح. انظر مليا للشاشة الموجودة في الأسفل لترى كيف أن إشارة الطرح أعرض إلى حد ما من الإشارة السالبة.



إذا كانت العملية الحسابية أطول من قدرة الشاشة على عرضها كاملة، فإنه ما زال بالإمكان كتابتها و تنفيذها حسابيا وذلك كما هو موضح في الشاشتين الموجودتين أدناه حيث الأمر يعبر عن عملية جمع حسابية لأول إثني عشر عدداً من أرقام العد.

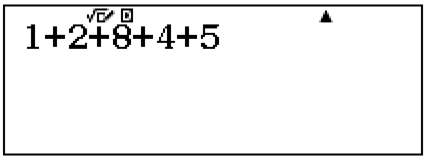


كما يمكنك أن ترى، أن الآلة الحاسبة تعرض تلقائيا أسهما على شاشة العرض عندما تكون العملية الحسابية أطول من قدرة الشاشة على عرضها. إذا كنت في حاجة للتحقق أو لتعديل الإدخالات السابقة، يمكنك التنقل إلى الخلف والأمام بإستخدام مفاتيح المؤشر ◄ و ► (يقع هذان المفتاحان على الطرفين المتقابلين من مجموعة من أربع مفاتيح في أعلى لوحة المفاتيح). لاحظ بشكل خاص أنه في حال ضغطت على الزر ► عندما يكون المؤشر في أقصى الطرف الأيمن من الشاشة، فإنه سيقفز إلى أقصى الطرف الأيسر. وبالمثل، إذا قمت بالنقر فوق مفتاح ◄والمؤشر في أقصى الطرف الأيسر، فإن المؤشر سينتقل إلى أقصى الطرف الأيمن. ويؤدي النقر على مفتاح = في أي لحظة إلى حساب النتيجة.



كما هو مبين أعلاه، ليس من الضروري أن يعود المؤشر إلى نهاية العملية الحسابية من أجل الضغط على مفتاح =. لاحظ أن الجزء الأول فقط من العملية الحسابية ظاهر فقط وذلك بالرغم من وجود سهم يشير إلى أن هناك المزيد من العمليات الحسابية غير المرئية.

إذا أخطأت أثناء إدخالك العملية الحسابية، يمكنك محو كامل الأمر والبدء من جديد باستخدام المفتاح AC أو يمكنك تعديل المدخلات باستخدام المفتاح DEL. ضع المؤشر على يمين الرمز أو العدد واضغط على الزر DEL من أجل حذفه. يمكنك بعد ذلك إضافة رمز أو عدد جديد آخر عبر النقر على ما يمثله في لوحة المفاتيح.

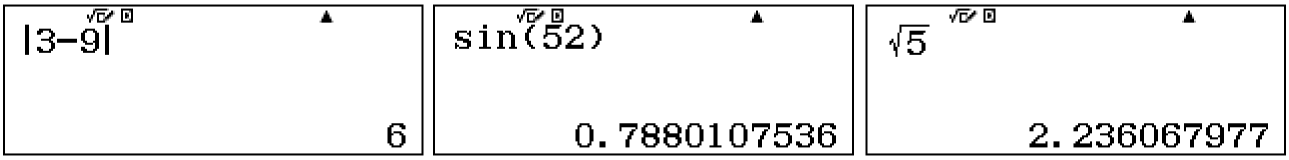


يمكن أيضا إدخال الأعداد أو الرموز باستخدام SHIFT DEL ، لكن ليس من الضروري القيام بذلك عادة. كما أن هناك الأمر UNDO والذي يسمح لك بالتراجع عن آخر عملية قمت بها. انقر على ALPHA DEL. جرب هذه الطريقة بنفسك عبر إدخال الأمر أعلاه ثم عدله باستبدال الرقم 8 بالرقم 3 قبل النقر على مفتاح =.

أوامر رياضية

هناك العديد من العمليات الحسابية المتوفرة على هذه الآلة الحاسبة حيث سيجري استكشافها بشيء من التفصيل في وحدات لاحقة. سنقوم هنا بالنظر في عدد قليل من أوامر لوحة المفاتيح.

عندما تكون في الوضع الرياضي (*Math* Mode)، يمكنك عادة إدخال أي أمر رياضي بنفس الطريقة التي قد تكتبه فيها باليد، وذلك نظراً لأن الآلة تستخدم طريقة الإدخال الطبيعية. في بعض الحالات، تكون أوامر لوحة المفاتيح هو الشيء الأول الذي تحتاج إلى استخدامه، بينما في أحيان أخرى يجري إدخال الأمر بعد إدخال الأرقام. إليك الآن ثلاثة أمثلة يجري فيها إدخال مفتاح الأمر *أولا*:

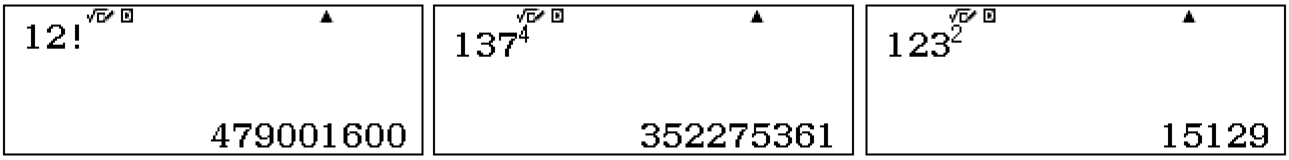


سيجري التحدث عن مفتاح الجزر التربيعي √■ بشيء من التفصيل في الوحدة التالية. لاحظ أنه في المثال السابق أعلاه، جرى استخدام SHIFT = من أجل الحصول على تقريب عددي في صورة عددعشري.

لاحظ أن أمر الجيب (sine) sin قد إكتمل بوضع القوس الأيمن. على الرغم من أن ذلك ليس ضروريا حيث ستقوم الآلة الحاسبة بإجراء العملية بدونه. من الجيد دوماً إغلاق الأقواس بدلا من ترك الآلة الحاسبة تغلقها بشكل تلقائي. على اعتبار أن الإعداد الافتراضي للحاسبة عرض الأوامر بالدرجات، ستحصل على النتيجة الخاصة بـ $\sin 52^{o}$. سيجري التحدث عن مفاتيح علم المثلثات بمزيد من التفصيل في الوحدة 5.

يتطلب أمر القيمة المطلقة مفتاحي SHIFT و) والرمز الخاص به ضمن شاشة الآلة الحاسبة هو *Abs* مكتوب فوق المفتاح) المذكور سابقا. يعرض المثال الموجود في الأعلى كيف أن المسافة بين 3 و 9 هي 6، مع تجاهل الاتجاه أو إشارة الفرق.

إليك هنا ثلاثة أمثلة يجري فيها استخدام مفتاح الأوامر *بعد* إدخال الرقم:

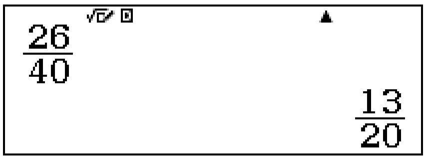


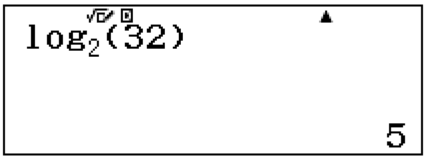
سيؤدي النقر على المفتاح x^2 بعد إدخال عدد ما إلى إعطاء مربع هذا العدد؛ في المثال الموضح أعلاه،

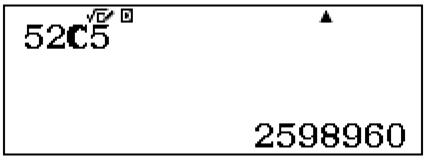
15 129 = 123 x 123 . تتطلب معظم القوى/الأسس استخدام مفتاح $x^{■}$ ، كما هو مبين في حالة القوى/الأس الرابع للعدد 137 في الأعلى. سيجري مناقشة العمليات المرتبطة بهذه المفاتيح بمزيد من التفصيل في الوحدة المقبلة.

نحتاج مضروب العدد *x!* لحساب مضروب العدد 12، وهو 12 x 11 x 10 x ... x 1. ونتيجة ضرب هذه الأعداد ببعضها نحصل على العدد : 600 001 479. إن الرياضيات المرتبطة بمضروب الأعداد مهمة في علم الاحتمالات وسيجري التحدث عنها بالتفصيل في وحدة الاحتمالات رقم 12. من أجل تطبيق هذا الأمر، انقر على SHIFT ومن ثم على المفتاح x^{-1}.

تتطلب بعض الأوامر الرياضية إدخال أكثر من عدد واحد. بشكل عام، عند استخدام طريقة العرض الطبيعي، يجب إدخال هذه العمليات الحسابية في الحاسبة بنفس الطريقة التي كنت ستقوم بها لو كنت تكتبها باليد. إليك ثلاثة أمثلة حول عملية إدخال أكثر من مدخل واحد.





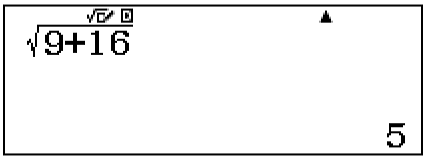


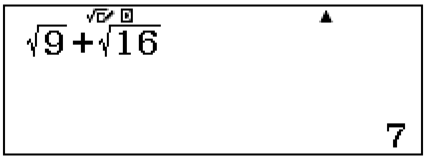
يعرض المثال الأول أعلاه كسرا جرى إدخاله. يمكنك إما النقر على مفتاح [▭/▭] أولا ومن ثم إدخال البسط والمقام باستخدام مفاتيح المؤشر مثل [▼] و [▲] للتنقل بينها؛ أو يمكنك البدء عبر إدخال 26 ومن ثم النقر على مفتاح [▭/▭]. سيجري التطرق إلى استخدام الكسور بمزيد من التفصيل في الوحدة 2. لاحظ إمكانية إدخال الكسور المختلطة (▪▭/▭) عبر [SHIFT] [▭/▭].

أما المثال الثاني في الأعلى، فيعرض استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد لوغاريتم 32 للأساس 2 : يعني هذا أننا نبحث عن الأس/القوى اللازم للعدد 2 حتى نحصل على العدد 32. قم بالنقر على المفتاح [log▪▭] أولا ومن ثم قم بإدخال العددين 2 و 32 كما هو مبين وذلك بإستخدم المفاتيح [▶] و [◀] للتنقل. سيجري التحدث بشكل تفصيلي عن اللوغاريتمات في الوحدة 6.

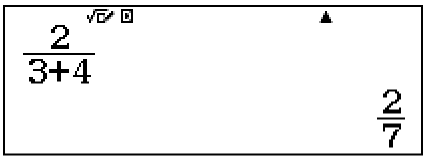
يعرض المثال الثالث في الأعلى عدد التوافيق (combinations) الخاصة بـ 52 كائن مأخوذ منها 5 في كل مرة، حيث يجري كتابتها بشكل رياضي بالصيغة 52C5. وتعد الطريقة الأفضل لإدخال التوافيق في الآلة الحاسبة هي عبر إدخال 52 في البداية، ومن ثم استخدام الأمر nCr من خلال [SHIFT] [÷] من ثم إدخال الرقم 5. ستعرض لنا النتيجة في هذه الحالة العدد 960 598 2 وهو عدد توافيق وجود خمس أوراق لعب مختلفة في اليد من بين أوراق اللعب الـ 52. سنتحدث عن عمليات حساب هذه الأوضاع بمزيد من التفصيل في الوحدة 12.

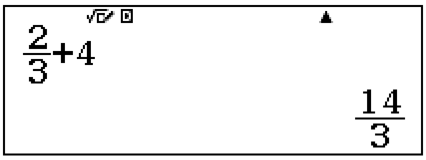
عند استخدام أوامر رياضية في العمليات الحسابية، غالبا ما يكون ضروريا استخدام مفتاح المؤشر [▶] للخروج من الأمر الأول قبل الانتقال للأمر الثاني. سيبقى المؤشر في الأمر الأول حتى الانتقال منه. لتوضيح هذه الفكرة، لندرس الشاشتين التاليتين بعناية.





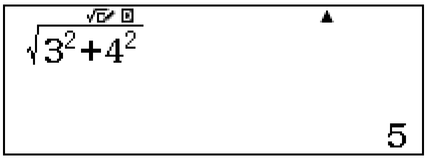
في الحالة الأولى، بعد النقر على [√▭]، أدخلنا 16 + 9 ومن ثم نقرنا على [=]. بقي المؤشر ضمن علامة الجذر التربيعي. أما في الحالة الثانية، بعد إدخال [√▭] ثم [9]، قمنا بالنقر على [▶] من أجل إخراج المؤشر من الجذر التربيعي الأول قبل النقر على [6] [1] [√▭] [+] لإدخال الجذر التربيعي الثاني ثم مفتاح [=] للحصول على النتيجة. قم بتجربة هذا بنفسك لرؤية كيفية عملها. إليك مثال آخر حول نفس الفكرة، وذلك باستخدام الكسور:

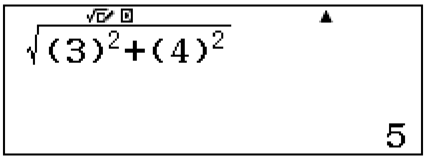


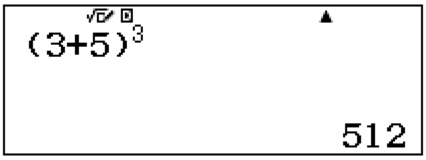


في الحالة الثانية من هذه الشاشات، جرى استخدام [▶] من أجل الخروج من أمر الكسر قبل إضافة الرقم 4. بطبيعة الحال، من الممكن دوماً استخدام الأقواس لتوضيح المعاني في التعبير الرياضي، ولكنها ليست دائما

ضرورية. على سبيل المثال، في الشاشات الثلاثة أدناه، تعد الأقواس ضرورية في الحالة الأولى، إنما ليست في الثانية، كما أن عدم وجودها في الحالة الثالثة هو للتوضيح.



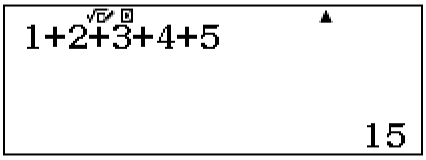


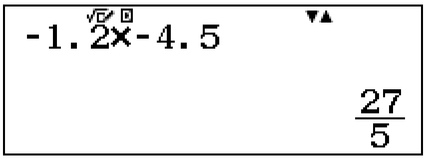


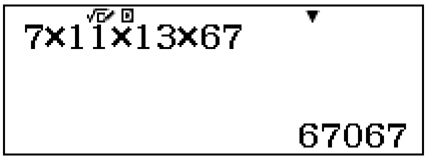
وعلى اعتبار أن عملية إدخال التعابير بين أقواس تأخذ وقتا طويلا، من الأفضل تطوير خبرة في إنشاء التعابير من دونها كلما كان ذلك ممكنا.

استرداد الأوامر

ربما قد لاحظت وجود سهم صاعد صغير في الجزء العلوي من شاشة آلتك الحاسبة على الطرف الأيمن منها. يشير هذا السهم إلى إمكانية استخدامك مفتاح المؤشر ▲ من أجل استرداد أوامر سابقة من القائمة. عندما تكون على قمة القائمة، يشير السهم النازل إلى هذه الإمكانية. وعندما تكون بين قائمة أوامر سابقة ولاحقة، سترى كلا السهمين معروضان أمامك للإشارة إلى إمكانية التنقل في كلا الاتجاهين. ويعرض الشكل التالي الاحتمالات الثلاثة هذه.

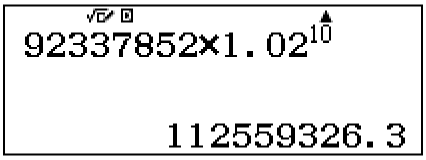




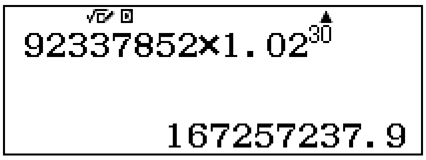


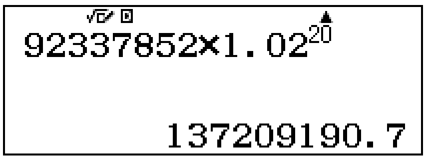
إذا قمت بتحريك مفتاح المؤشر لعرض أمر سابق، يمكنك إعادة إدخال هذا الأمر من جديد عبر النقر على مفتاح =، أو يمكنك تعديله أولا (باستخدام DEL,▶,◀) ومن ثم النقر على =. تعتبر هذه طريقة جيدة لأداء عدة عمليات حسابية متشابهة على التوالي من دون الحاجة إلى إعادة إدخال الأمر في كل عملية حسابية من جديد.

إذا كنت ترغب في تعديل فقط الأمر الأخير، هناك طريقة أكثر سهولة. تحتاج فقط للنقر على مفتاح ◀ ومن ثم تحرير الأمر بشكل مباشر. على سبيل المثال، تُظهر الشاشة التالية تقدير تقريبي بحوالي 113 مليون لعدد سكان الفلبين في العام 2020، مع العلم أن عدد سكان الفلبين في العام 2010 وهو 92,337,852 مضافا إليه زيادة 2% سنويا خلال الأعوام العشر القادمة. لاحظ أنه يمكن حساب معدل النمو البالغ 2% عبر ضربه بالعدد 1.02.

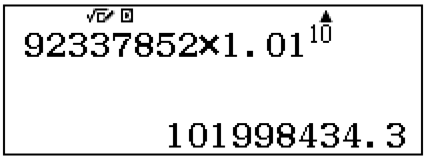


إن الطريقة الأسهل للحصول على تقدير لسنوات لاحقة، على افتراض أن معدل النمو السكاني السنوي سيبقى نفسه، هي النقر على ◀، ومن ثم تعديل الأس 10 إلى رقم مختلف ثم الضغط على = لظهور النتيجة. تعرض الشاشات التالية عدد السكان في عامي 2030 و 2040.





سيقود معدل النمو السكاني العالي جدا في الفلبين في عام 2010 إلى وصول عدد سكانها إلى أكثر من 167 مليون نسمة بحلول عام 2040. يمكن استخدام نفس العملية الحسابية للتنبؤ بعدد السكان في حال جرى العمل على تخفيض معدل النمو السكاني من 2% إلى 1% كما هو موضح في الأسفل. حيث نرى كيف جرى تغيير كل من عدد السنوات ومعدل النمو في آن واحد.

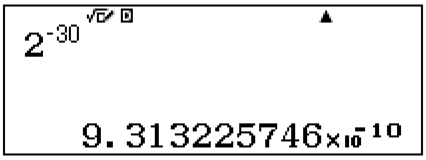


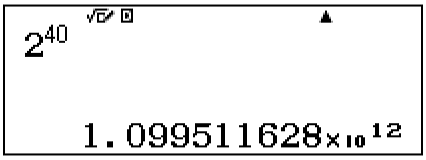
كما ترى، عدد سكان الفلبين سيصل إلى حوالي 102 مليون نسمة في عام 2020 في حال انخفض معدل النمو إلى 1%، وهو رقم أقل بحوالي 10 ملايين مما إذا كان معدل النمو 2%. يمكن إجراء توقعات متتالية من هذا النوع بكفاءة بهذه الطريقة وذلك دون الحاجة إلى إدخال عبارات طويلة ومعقدة أكثر من مرة.

سيتم مسح قائمة الأوامر عند إطفاء الآلة الحاسبة أو في حالة تغيير الوضعية (كما هو موضح أدناه)، لكن لن تُمسح عند النقر على مفتاح AC. وبالتالي من الحكمة الحفاظ على الآلة الحاسبة في الوضعية نفسها وتركها مفتوحة في حال كنت تفكر بأنه ستحتاج من جديد إلى القيام بنفس أنواع العمليات الحسابية لعدة مرات.

الكتابة العلمية والهندسية

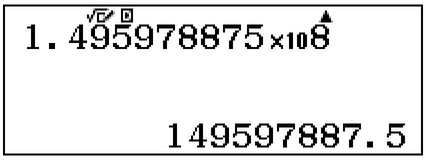
عندما تكون الأعداد كبيرة جداً أو صغيرة جداً لتحتويها الشاشة، فإنه يجري كتابتها تلقائيا بالصيغة العلمية (Scientific notation) التي تتكون من عدد بين 1 و 10 مع قوى للأساس 10. الطريقة الدقيقة لحدوث هذا تعتمد على صيغة العدد العشري الأمر الذي سيجري وصفه لاحقا في هذه الوحدة. ولتوضيح ذلك، تعرض الشاشة أدناه قوتين للعدد 2 تطلب التعبير عنهما كتابتهما بالصيغة العلمية.





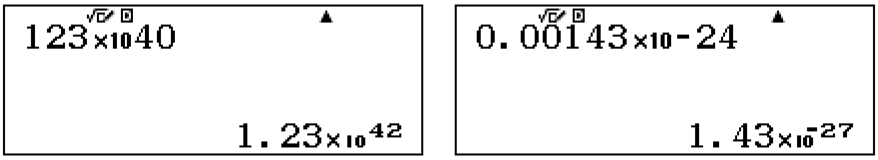
إن القيمة الدقيقة للعدد الأول هي 1099511627776 والتي لا يمكن أن تتسع لها الشاشة، وبالتالي جرى تقريبها باستخدام الكتابة العلمية. لاحظ كيف جرى تقريب الرقم الأخير منها للأعلى. وبشكل مشابه، فإن النتيجة الثانية جرى تقريبها من ...0.000000000931322574615479 لكي تحتويها الشاشة.

يمكن إدخال الأرقام مباشرة إلى الآلة الحاسبة باستخدام الصيغة العلمية. حيث نبدأ بإدخال رقم بين 1 و 10 ثم نضغط على المفتاح $\times 10^x$ ومن ثم القيام مباشرة بإدخال القوى لـ 10. على سبيل المثال، فإن متوسط المسافة من الأرض إلى الشمس هي 1.495978875×10^8 كم، والتي يمكن إدخالها بالصيغة العلمية كما هو موضح في الشاشة أدناه.

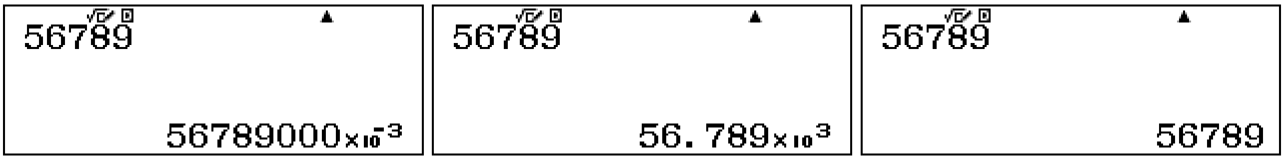


لاحظ أن الأس 8 لا يظهر بشكل علوي على الشاشة وذلك على الرغم من معرفة الآلة الحاسبة بأنه قوى. في الوضع الراهن لعرض النتائج، لاحظ كيف أن الآلة الحاسبة لا تعتبر هذا الرقم كبيرا بما يكفي ليتطلب كتابته بالطريقة العلمية، وبالتالي هو عدد يشير إلى أن متوسط بعد الشمس عن الأرض حوالي 149 597 887.5 كم، متوسط المسافة يمكن تقريبه ليصل إلى حوالي 150 مليون كيلومتر.

تتطلب الصيغة العلمية أن يكون الرقم الأول بين 1 و 10. بالتالي، إذا استخدمت المفتاح $\times 10^x$ لإدخال رقم ضمن الصيغة العلمية بشكل غير صحيح (أي باستخدام رقم ليس بين 1 و 10)، تقوم الآلة الحاسبة بتمثيله بشكل صحيح، كما نرى الشاشة أدناه.



أما الصيغة الهندسية (*Engineering notation*) فهي وسيلة مختلفة لتفسير الأرقام الكبيرة والصغيرة، وذلك باستخدام الصيغة العلمية مع الأساس 10 مرفوعاً للقوى 3. يعتبر هذا الأمر مناسبا في العديد من التطبيقات العملية والتي منها القياس وذلك على اعتبار أن الوحدات تملك غالبا أسماء مختلفة مع هذه القوى.على سبيل المثال، يمكن تأويل المسافة 789 56 مترا على أنها 56.789 كم أو 000 789 56 ملم، وذلك كما هو موضح في الشاشات أدناه وذلك عبر تحويل الأرقام من خلال الضغط المتتالي على المفتاح ENG

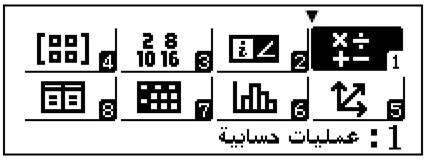


إن العدد نفسه لم يتغير خلال هذه الخطوات، ما تغير هو طريقة تمثيله من أجل سهولة تفسيره.

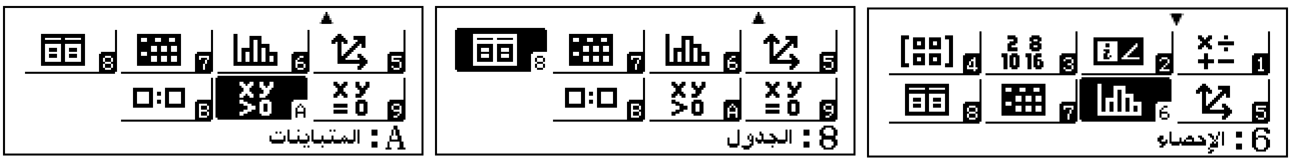
لاحظ أيضا كيف أن التحويلات يمكن أن تتم في الاتجاه المعاكس باستخدام (←) ENG SHIFT.

أوضاع الآلة الحاسبة

قمنا حتى الآن باستخدام الآلة الحاسبة فقط لإجراء العمليات الحسابية. لكن في الوقت نفسه، يمكن استخدام الآلة الحاسبة لاستكشاف عددا من الجوانب الرياضية الأخرى والتي يمكن الوصول إليها من خلال الأوضاع المختلفة. للاطلاع على هذه الأوضاع ، اضغط على مفتاح MENU للدخول إلى الشاشة الموضحة أدناه والتي تعرض الأوضاع الثمانية الأولى (من العديد من الأوضاع) بدءا بوضعية الآلة الحاسبة الذي كنا نستخدمه حتى الآن.



يمكنك تحريك المؤشر للانتقال عبر الأوضاع المختلفة ومن ثم النقر على = للوصول إلى الوضعية المرغوبة. تُظهر الشاشات الثلاث التالية في الأدنى كامل الأوضاع مع أيقوناتها الوصفية.



يمكن الوصول إلى الأوضاع الإحدى عشر المتاحة عبر النقر على MENU مترافقا مع رقم أو مفتاح الوضعية. سيتم استكشاف كل هذه الأوضاع بالتفصيل في وحدات لاحقة. في الوقت الراهن، نعرض نظرة عامة موجزة للأوضاع الأخرى.

الوضعية 2 : وضعية الأعداد المركبة (*Complex* mode). تتعامل مع الأعداد المركبة المستخدمة في الرياضيات المتقدمة. من الأمثلة على الأعداد المركبة العدد $i = \sqrt{-1}$. عندما تكون في هذه الوضعية، يمكن

إدخال العدد *i* في الآلة الحاسبة ومن ثم استخدامه في العمليات الحسابية. في هذه الوضعية، تتوفر عمليات خاصة بـ الأعداد المركبة أيضا. سيجري استخدام وضعية الأعداد المركبة بشكل أوسع في الوحدة 9.

الوضعية 3 : وضعية انظمة الأعداد (*Base N* mode). تسمح لك هذه الوضعية بإجراء العمليات الحسابية ضمن أنظمة أعداد مختلفة إضافة إلى نظام الأعداد العشرية. تملك لوحة المفاتيح أوامر (مكتوبة باللون الأزرق) خاصة بتحويل الأرقام بين النظام الثنائي، الثماني، الست عشري و العشري. وتعتبر هذه الأنظمة مهمة بشكل خاص لعلوم الحاسب، لكون هذه الأنظمة مستخدمة بشكل واسع في الحاسبات. سيجري استكشافها بشكل أكبر في الوحدة 9.

الوضعية 4 : وضعية المصفوفات (*Matrix* mode). وتستخدم من أجل حسابات المصفوفات. يمكنك تحديد واستخدام ما يصل إلى أربع مصفوفات كل منها تملك أبعادا تصل الى 4×4، إضافة إلى القدرة على أداء العمليات الحسابية الخاصة بالمصفوفات. سوف نستخدم هذه الوضعية بشكل أوسع في الوحدة 7.

الوضعية 5 : وضعية المتجهات (*Vector* mode). والذي يسمح لك بتعريف واستخدام ما يصل إلى أربع متجهات ثنائية أو ثلاثية الأبعاد، ومن ثم يجري الوصول إلى العمليات على المتجهات. سوف نعتمد على هذه الوضعية في الوحدة 8.

الوضعية 6 : وضعية الإحصاء (*Statistics* mode). وتفيد هذه الوضعية في إجراء العمليات الإحصائية المختلفة سواء في متغير واحد أو متغيرين، و سيجري التعامل معها ضمن الوحدتين 10 و 11 المختصتين بالإحصاء. في هذه الوضعية، يمكن إجراء حسابات إحصائية مختلفة إضافة إلى استكشاف مجموعة من النماذج ثنائية المتغير.

الوضعية 7 : وضعية جدول بيانات (*Spreadsheet* mode). تسمح لك هذه الوضعية بتعريف واستخدام الجداول لأغراض رياضية. سنبحث جوانب من هذه الوضعية في الوحدة 13 وفي أماكن أخرى.

الوضعية 8 : وضعية الجدول (*Table* mode). وهو من أجل عمل جداول لقيم الدوال، وهي مفيدة في العديد من الأمور بما فيها رسم الرسوم البيانية وحل المعادلات. سوف نستخدم هذا النمط في العديد من الوحدات المعنية بالوظائف والمعادلات.

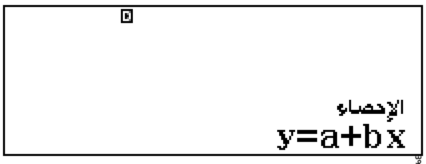
الوضعية 9 : وضعية المعادلة (*Equation* mode) وهو من أجل حل المعادلات من مختلف الأنواع. ويمكن هنا حل المعادلات التربيعية والتكعيبية وذات الدرجة الرابعة إضافة إلى النظم المؤلفة من معادلتين أو 3 أو 4 معادلات خطية. سوف نستخدم هذه الوضعية على نطاق واسع في الوحدة 4.

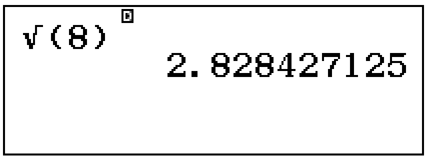
الوضعية A : وضعية المتباينات (*Inequality* mode) وهو من أجل حل المتباينات التربيعية والتكعيبية وذات الدرجة الرابعة من أنواع مختلفة.(لاحظ كيف أن حرف A مكتوب على لوحة المفاتيح باللون الأحمر، ومن أجل اختياره عليك بالضغط على المفتاح (−) بعد ضغط مفتاح MENU) سوف نستخدم هذه الوضعية في الوحدة 4.

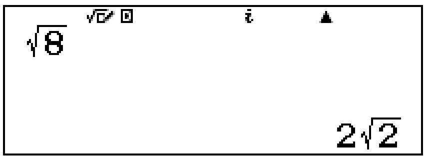
الوضعية B : وضعية التناسب (*Ratio* mode). والذي يستخدم من أجل حل مسائل التناسب والتي تتضمن زوجا من التناسب. سيجري النظر إلى هذه الأنواع الخاصة من المعادلات في الوحدة 4.

في العادة، يكون واضحا الوضعية التي أنت فيها حاليا. إذا لم تعرف الوضعية التي أنت فيها، يمكنك النقر المزدوج على مفتاح MENU (مرتين) من أجل عرض الوضعية ومن ثم قم بإزالتها.

في بعض الوضعيات، سيجري عرض اسم الوضعية عندما تنقر على الزر AC وذلك كما هو موضح في الأسفل في حال وضعية الإحصاء. الشاشة في اليسار تعرض الرمز الصغير *i* في أعلى الشاشة من أجل الإشارة إلى وضعية الأعداد المركبة.



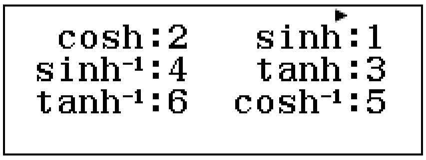


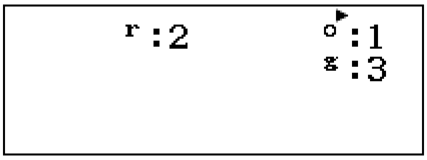


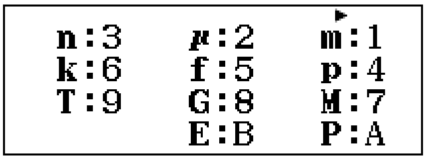
بينما ما يزال بالإمكان القيام بالعمليات الحسابية ضمن هذه الأوضاع، لن تملك دوما فوائد عرض طريقة الكتابة الطبيعية على الشاشة وذلك كما هو مبين في شاشة المنتصف في الأعلى في نمط الإحصائيات، لذا فمن الأفضل عموما استخدام وضعية الحساب في حال كنت تريد القيام بالعمليات الحسابية بشكل أساسي. في هذه الوحدة التمهيدية هذه، نقترح عليك إبقاء آلتك الحاسبة في وضعية الحساب. لاحظ بأنه سيجري مسح شاشة الآلة الحاسبة في كل مرة يجري فيها تغيير الأوضاع.

أوامر OPTN

يوفر مفتاح OPTN قائمة لخيارات أخرى متصلة بالوضعية التي اخترتها وغير متوفرة مباشرة على لوحة المفاتيح. على سبيل المثال، وفي وضعية الحساب، يوفر لك هذا المفتاح إمكانية الوصول إلى الدوال الزائدية ورموز مختلفة للقياسات الهندسية إضافة إلى رموز هندسية متنوعة وذلك لتسهيل إدخال البيانات، كما هو موضح أدناه.





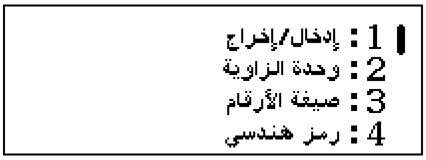


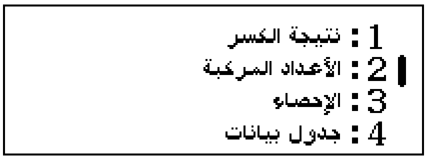
وبشكل مشابه ضمن نمط الإحصاء، يوفر مفتاح OPTN إمكانية الوصول إلى العديد من عمليات الإحصاء العددي. سنستكشف قدرات تلك الأوامر في الوحدات القادمة؛ كلّ بحسب صلتها بالمحتوى.

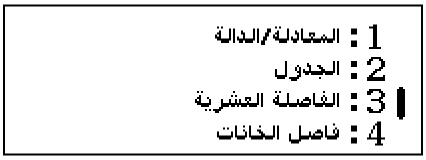
الإعدادات (SET UP)

نقترح عليك الآن العودة إلى وضعية عمليات حسابية عن طريق نقر MENU 1 .

في أي وضعية كنت، يمكنك إعادة ضبط الآلة الحاسبة بطرق مختلفة وذلك عن طريق الإعدادات (SET UP) عبر الضغط على SHIFT MENU. لدى قيامك بذلك، ستلاحظ وجود عدة شاشات في وضعية SET UP مع شريط تمرير موجود على يمين الشاشة. يمكنك التنقل بين الشاشات باستخدام المفتاحين ▼ و ▲ ومن ثم اختيار إعدادات الشاشة التي تريد باستخدام الأرقام. إليك الآن الشاشات الثلاثة الأولى:

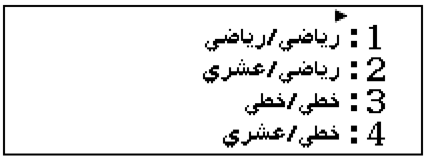




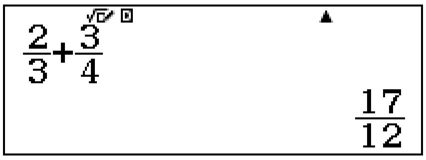


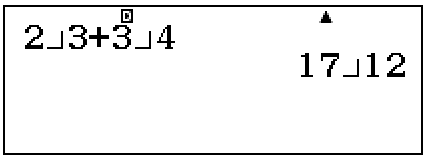
الإدخال/الإخراج

اضغط 1 لرؤية الخيارات الأربعة المتاحة. يمكن إعداد عرض الآلة الحاسبة من أجل المدخلات إما في صيغة العرض الطبيعي (الرياضي) أو في صيغة السطر الواحد (الخطي) وذلك عبر النقر على مفتاح الرقم المرتبط بها:



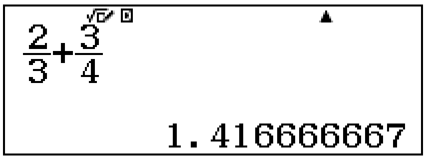
تسمح الصيغة 1 : **رياضي/رياضي** بإدخال مختلف التعبيرات الرياضية بالطريقة التقليدية حيث من الأفضل عادة استخدامها. أما في الصيغة 3 : **خطي/خطي**، فغالبا ما تكون عملية إدخال الأوامر أكثر صعوبة لكون العرض مقتصرا على سطر واحد. على سبيل المثال، تُظهر الشاشتين التاليين نفس المعلومات، الأولى جرى إدخالها في الصيغة 1 والثانية في الصيغة 3. ستلاحظ أنه إضافة إلى المظهر المختلف لكل منهما، و بالرغم من استخدام المفتاح في إدخال الكسور في كليهما، فإن إدخال الكسور ضمن الصيغة 3 أصعب إلى حدا ما مقارنة بالصيغة 1 على اعتبار أن الأرقام يجب إدخالها بشكل دقيق بنفس الترتيب المكتوبة فيه.

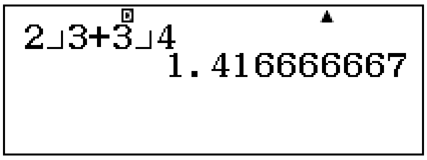




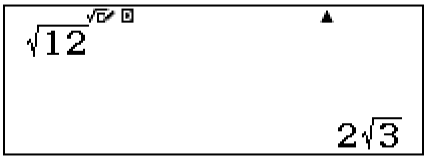
لن يجري عادة في الصيغة 3 عرض النتيجة بالطريقة المعتادة حيث سيبدو الشكل مختلف قليلا (كما هو واضح في الأعلى).

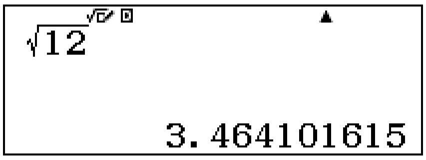
في بعض الأحيان، يريد بعض الناس أن يجري عرض نتائج الحسابات بتقريب عشري بدلا من النتيجة المضبوطة (وذلك على الرغم من إمكانية التحويل دوما باستخدام = SHIFT أو المفتاح S⇔D). إذا كنت تفضل القيام بذلك أنت أيضا، عليك باختيار الصيغة العشرية لعرض النتائج. لتوضيح ذلك، تعرض الشاشتان الموجودتان أدناه نفس العملية الحسابية واحدة في الصيغة 2 : **رياضي/عشري** والثانية في الصيغة 4 : **خطي/عشري**. في هذه الحالة، كل صيغة تعطي تقريب عشري لقيمة الكسر المضبوطة.

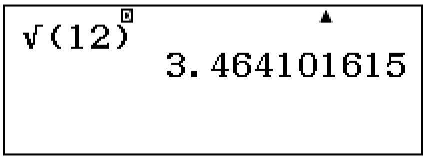




لتوضيح المزيد من الاختلافات، تعرض الشاشتان الموجودتان أدناه صيغة مدخلات الرياضيات، ولكن تعرض الشاشة الأولى العدد تماما مع الصيغة 1 : **رياضي/رياضي** في حين تعرض الشاشة الثانية الصيغة 2 : **رياضي/عشري** (سيسمح لك المفتاح S⇔D بالتبديل بين هذين الوضعين). أما الشاشة الثالثة فهي في صيغة 4 : **خطي/عشري** ، ولكن هنا، فإن استخدام مفتاح S⇔D لن يقوم بتحويل الرقم إلى التمثيل المحدد تماما.







نقترح عليك تجربة هذه الصيغ بالطريقة التي تتناسب مع غاياتك وفهم الاختلافات بينها، وذلك على الرغم من أننا نقترح عليك دائما استخدام الصيغة 1 : **رياضي/رياضي**.

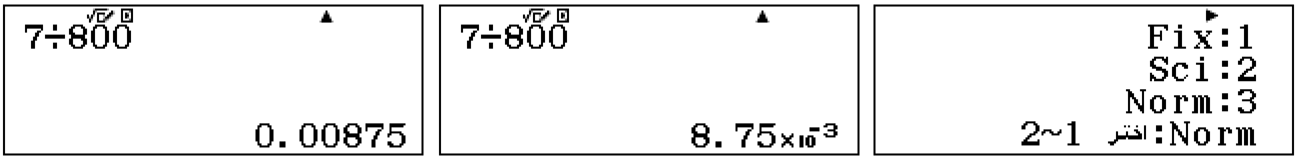
الزوايا

يمكن للآلة الحاسبة أن تقبل الزوايا بصيغ الدرجات، الراديان أو الغراديان، والخيار الذي جرى انتقاؤه من شاشة الإعدادات (SET UP) سيجري عرضه بحرف صغير هو إما D أو R أو G. سوف نتحدث عن الاختلافات بينها واستخدامات كل منها في الوحدة 5. يمكنك دوما تغيير اختياراتك بحسب الرغبة تجاه عملية حساب معينة وهو الأمر الذي سنتطرق إليه أكثر في الوحدة 5. يميل معظم الناس إلى ترك الآلة الحاسبة على صيغة الدرجات إذا كانوا مهتمين بالمسائل العملية، وصيغة الراديان إن كانوا مهتمين بالمسائل النظرية. نقترح عليك في الوقت الراهن تركها بصيغة الدرجات.

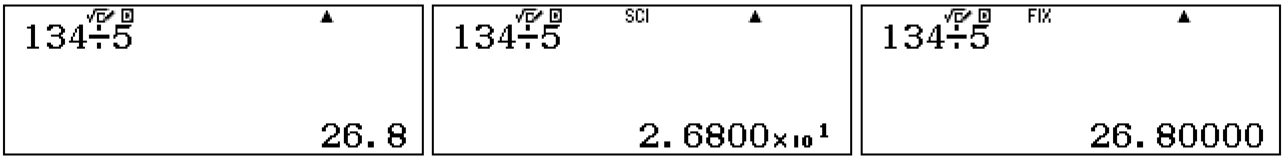
صيغة الأرقام

هناك عدد قليل من الخيارات التي يجري فيها عرض أرقام الخانة العشرية. يمكنك اختيار [1] : Fix لتحديد نفس عدد الخانات العشرية لجميع النتائج، أو الصيغة العلمية [2] : Sci من أجل كل النتائج أو صيغة المقياس العادي [3] : Norm لكل النتائج. من المفيد في بعض الأحيان اختيار Fix أو Sci (مثلا للتأكد من الحصول على كل النتائج بنفس عدد الخانات العشرية وخاصة في حالة الحسابات المالية)، ولكن نعتقد بأنه من الأفضل عموما اختيار Norm العشرية والتي تسمح للآلة الحاسبة بعرض عدد الخانات العشرية التي تراها مناسبة.

عندما يتم اختيار Norm، يتوفر خياران، الأولى يدعى Norm 1 والثاني Norm 2. هما تقريبا نفس الشيء ما عدا أن استخدام Norm 1 سيؤدي إلى أن يجري التدوين العلمي بشكل تلقائي للأعداد الصغيرة قبل قيام Norm 2 بعمل ذلك. على سبيل المثال، لدينا الشاشتان التاليتان أدناه تجريان نفس الحسابات بشكل عشري بعد اختيار Norm 1 و Norm 2 على التوالي واستخدام [SHIFT] [=] لغرض الحصول على النتيجة العشرية.



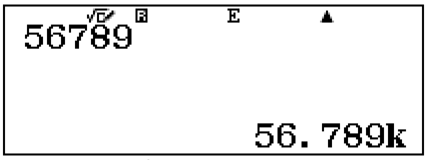
نقترح عليك اختيار Norm 2، ولكن عليك أن تقرر هذا بنفسك على اعتبار أنها في الغالب مسألة تفضيل شخصي وتعتمد على أنواع العمليات الحسابية التي ترغب بالقيام بها. إليك نفس العملية الحسابية (134÷5) ممثلة بشكل عشري بالصيغ الثلاثة Fix و Sci و Norm على التوالي:

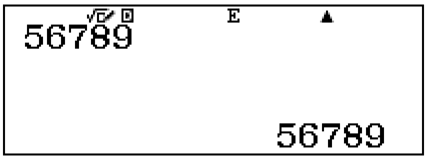


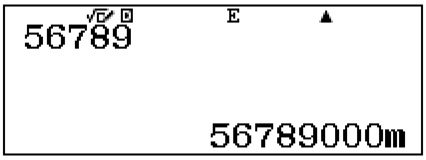
لاحظ أنه لدى اختيار صيغتي Fix و Sci فإن هناك رمزا يحمل اسم كل واحد منهما يظهر على الشاشة لدى اختيار الصيغة في الأعدادات وذلك كما هو موضح في أول شاشتين. عندما تختار صيغة Fix، عليك أيضا اختيار عدد الخانات العشرية المستخدمة (كانوا خمسة في الشاشة الأولى في الأعلى). عندما تختار صيغة Sci، ستحتاج أيضا لاختيار عدد الأرقام التي سيتم عرضها (جرى عرض خمسة في الشاشة في الأعلى، بالتالي هناك أربع منازل عشرية معروضة وخانة واحدة إلى يسار الفاصلة العشرية).

الرمز الهندسي

كما لاحظنا سابقا في هذه الوحدة، يمكن استخدام الكتابة الهندسية في بعض الأحيان للمساعدة على التفسير. تكمن إحدى الطرق الكفيلة بتحقيق ذلك عبر إدخال الرموز الهندسية وذلك بدلا من الاعتماد على قوى/أس الرقم عشرة. تسمح لك شاشة الإعدادات الأولى باختيار إن كنت تريد استخدام هذه الرموز أم لا. عندما يجري استخدام هذه الرموز، يجري استخدام الاختصارات القياسية لأس الرقم عشرة وذلك كما هو موضح في الأسفل حيث تعرض الشاشة الموجودة في الأسفل مسافة مقدارها 56 789 مترا والتي يمكن تأويلها على أنها 56.789 كم أو 56 789 000 ملم وذلك عبر تحويل الأرقام تباعا بالنقر على مفتاح [ENG].



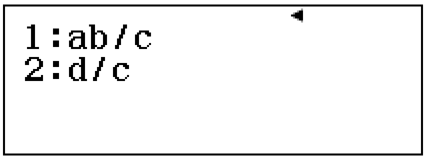




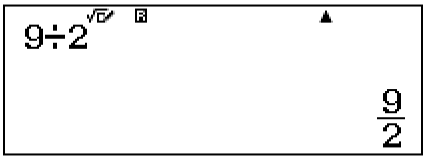
في هذه الحالات، لاحظ أن استخدام الرموز الهندسية معبّر عنه من خلال حرف E صغير موجود على الجزء العلوي من الشاشة.

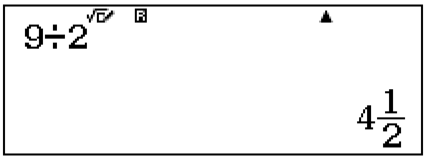
نتيجة الكسر

تقدم شاشة الإعدادات الثانية الموضحة في الأسفل اختيار إحدى طريقتين من أجل ناتج الكسر: إما كسر مختلط (باستخدام الخيار ab/c : [1]) أو كسر صحيح (باستخدام الخيار d/c : [2]).



كما سنرى في الوحدة الثانية، يمكن تحويل النتائج من صيغة إلى أخرى ($a\frac{b}{c} \leftrightarrow \frac{d}{c}$) عن طريق الضغط على [SHIFT] [S⇔D]، بالتالي فإن اختيار واحد منهما مسبقا ليس أمرا مهما جدا

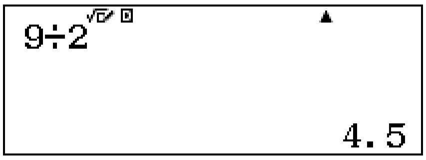


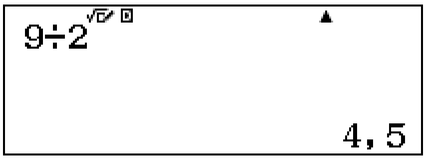


لتوضيح الآثار المترتبة على الخيارات، يمكن استكمال ناتج الكسر بإحدى الطريقتين وذلك كما هو موضح في الشكل أعلاه.

الفاصلة العشرية

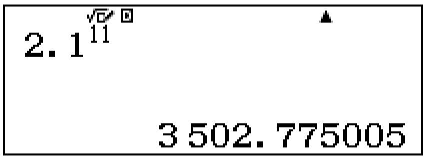
ضمن شاشة الإعدادات الثالثة إختر [3] : الفاصلة العشرية لكي تتمكن من الإختيار بين النقطة أو الفاصلة من أجل العلامة العشرية. اختر الخيار المناسب لبلدك. وإليك الاختياران هنا:

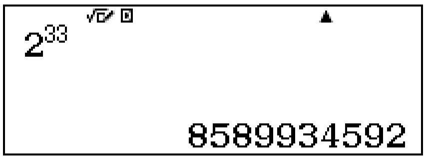


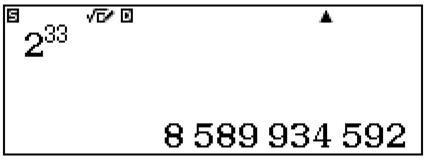


فاصل الخانات

هناك خيار آخر في الإعدادات يتعلق بطريقة عرض الأعداد الكبيرة. في حال اختيار [4] : **فاصل الخانات**، سيجري الفصل بين كل ثلاث خانات بمسافة وذلك بدلا من وضعها بجانب بعضها البعض من دون مسافة. يجد الكثيرون أنه من السهل قراءة الأعداد في هذا الشكل، وغالبا ما نستخدم نحن ذلك في هذه الوحدات. وتعرض الشاشتان الموجدتان في الأسفل أمثلة مع وبدون هذه الميزة المختارة، أما الشاشة الثالثة فتعرض كيف يعمل هذا الفصل مع أرقام كبيرة ليست صحيحة. لاحظ أن الفصل يجري فقط يسار الفاصلة العشرية بينما تبقى الخانات العشرية على حالها.



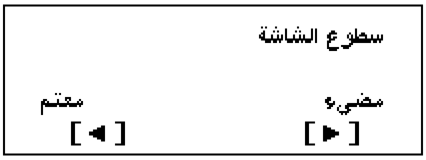




تستخدم الآلة الحاسبة *ClassWiz* مسافة بدلا من الفاصلة أو النقطة (للفصل بين الخانات) من أجل تجنب أي لبس ممكن أن يحصل مع منظومات الأعداد الدولية والتي تستخدم الرمزين السابقين (النقطة والفاصلة) لتمثيل العلامة العشرية.

سطوع الشاشة

يمكنك اختيار **سطوع الشاشة** (التباين) لضبط تباين الشاشة لتتناسب مع ظروف الإضاءة الخاصة بك.

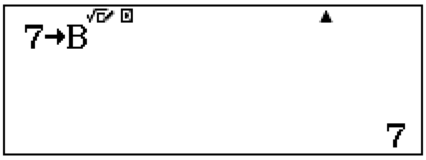


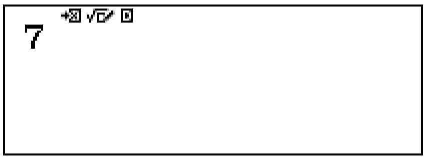
الذاكرات

يمكن تخزين نتائج الآلة الحاسبة في الذاكرة واسترجاعها لاحقا حيث يعد هذا أمرا مريحا في حال كنت تريد تسجيل القيم التي ترغب في استخدامها عدة مرات بين حين وآخر. تتوفر لأجل هذا ذاكرات متغيرة (تدعى من A إلى F إضافة إلى X و Y)، وهناك وذاكرة مستقلة (تدعى M).

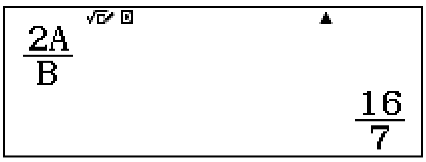
من أجل تخزين نتيجة تظهر فعليا على الآلة الحاسبة في ذاكرة متغيرة، اضغط STO. ينطبق هذا على الرقم الذي قمت بإدخاله فقط أو على نتيجة عملية حسابية ظهرت للتو. لاحظ كيف تعرض شاشة عرض الآلة الحاسبة رمزا للإشارة إلى أن القيمة يجري تخزينها في الذاكرة. أخيرا، اضغط على مفتاح الذاكرة للمتغير المعني، يظهر بحروف حمراء أعلى لوحة المفاتيح.

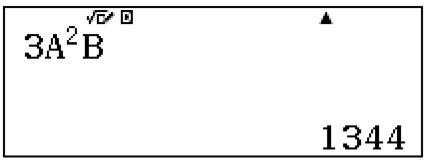
على سبيل المثال، إن مفتاح الذاكرة B هو [°'''] وذاك الخاص بـ x هو [)]. لاحظ أن هناك أيضا مفتاح خاص لـ x في الجزء العلوي الأيسر من الحاسبة والذي يستخدم نفس الذاكرة مثل x. تعرض الشاشات الموجودة في الأسفل عملية تخزين قيمة الرقم 7 في الذاكرة B. لاحظ أنه لم يجر استخدام لا المفتاح [ALPHA] ولا المفتاح [=]

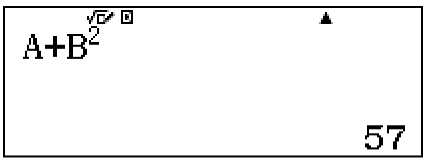




يمكنك الآن النظر إلى B على أنه متغير بقيمة حالية هي 7. من أجل استدعاء القيمة الحالية لمتغير، اضغط على مفتاح [ALPHA] متبوعا برقم مفتاح المتغير. من غير الضروري استخدام مفتاح [ALPHA] في حال كان المتغير x مستخدم: قم فقط بالضغط على مفتاح [x]. يجري استخدام المتغيرات على الآلة الحاسبة بنفس الطريقة التي يجري استخدامهم فيها في علم الجبر وذلك كما هو موضح في الأسفل وذلك بعد تخزين القيمة 8 في المتغير A



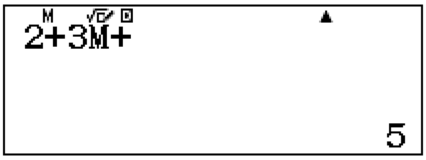


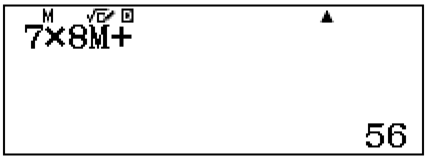


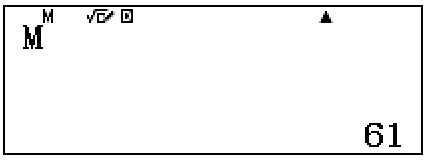
لتغيير القيمة في الذاكرة المتغيرة، تحتاج إلى تخزين عدد مختلف فيها حيث تقوم عملية التخزين باستبدال أي قيمة موجودة. لن يؤدي إيقاف الآلة الحاسبة أو تغيير النمط إلى حذف محتويات الذاكرة. يمكنك مسح كل

قيم الذاكرات عبر الضغط على SHIFT 9، لكن ليس من الضروري القيام بذلك على اعتبار أن تخزين عدد جديد يؤدي إلى استبدال العدد الحالي.

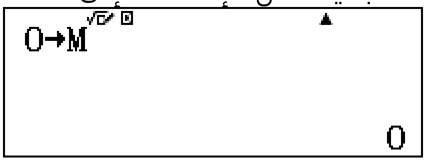
تعمل الذاكرة المستقلة (M) بشكل مختلف قليلا عن الذاكرة المتغيرة وذلك على الرغم من إمكانية استخدامها أيضا كذاكرة متغيرة عند الرغبة. يكمن الفرق في أنه يمكنك بسهولة إضافة أو طرح الأرقام من أو إلى الذاكرة، وذلك باستخدام M+ أو SHIFT M+ (M-). تعرض الشاشات الأوليتان الموجودتان في الأسفل كيفية استخدام M لتخزين (8 x 7) + (3 + 2)، في حين تعرض الشاشة الثالثة كيفية استدعاء النتيجة



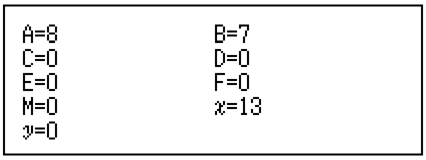




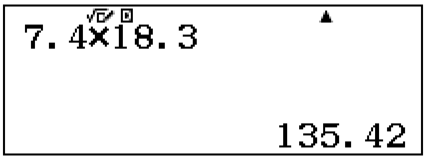
ليس من الضروري النقر على مفتاح = في أي مرحلة من المراحل هنا إلا عند استعادة قيمة M. لاحظ أن M تظهر كلما كانت تحتوي على عدد لا يساوي الصفر، تعرض الشاشة رمز M لتذكيرك بذلك. أسهل طريقة لحذف المحتويات الموجودة في M هي بتخزين العدد 0 في الذاكرة (مع 0 STO M+)، كما هو مبين أدناه. يجب عليك القيام بذلك قبل بدء سلسلة جديدة من الإضافات إلى M.

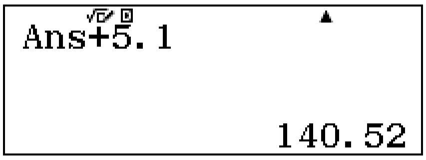


إذا كنت تستخدم الذاكرات بانتظام، قد يكون من الصعب عليك تذكر القيم المخزنة فيها. هنا يأتي أمر RECALL (استدعاء) بفائدة كبيرة وذلك عبر النقر على SHIFT STO حيث يؤدي ذلك إلى عرض ما يوجد في الذاكرات التسعة الخاصة بالآلة الحاسبة على الشاشة كما هو موضح في الشكل في الأسفل.

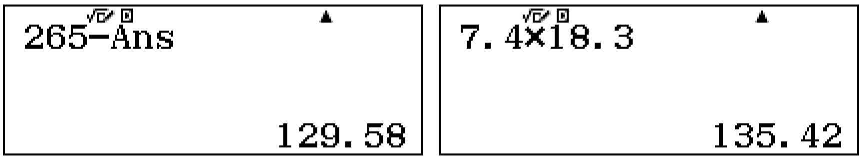


ذاكرة مفيدة جداً هي Ans، وهي تستدعي نتيجة أقرب عملية حسابية سابقة. ربما رأيت هذا الظهور عند القيام بسلسلة من العمليات الحسابية. على سبيل المثال، تعرض الشاشة الأولى في الأسفل استخدام الآلة الحاسبة لمعرفة نتيجة 18.3 x 7.4. عندما يجري الضغط بعدها على = 1 • 5 +، تفترض الآلة الحاسبة بأنه يجب إضافة القيمة 1 • 5 إلى النتيجة السابقة (والتي باتت تدعى *Ans*)، وذلك على اعتبار بأنه لم يوجد عدد قبل إشارة الجمع + (*Ans* غير مُدخل من قبل المستخدم).





عندما لا يتم استخدام النتيجة السابقة مباشرة، وعلى عكس الحالة المذكورة أعلاه، يمكن استدعاء ذاكرة *Ans* عن طريق Ans ، وذلك كما هو معروض في الأسفل لإيجاد (7.4 x 18.3) – 265 بعد القيام أولا باحتساب ما بين القوسين:



سوف نستخدم مفتاح Ans على نطاق واسع في الوحدة 14، حيث سيكون ذلك مفيدا هناك بشكل خاص.

تهيئة الآلة الحاسبة

وأخيرا، صحيح أنه ليس من الضروري تهيئة الآلة الحاسبة قبل الاستخدام، إلا أن أسهل وأنجع وسيلة لاستعادة كافة إعدادات الآلة الافتراضية في آن واحد هو تشغيل الآلة الحاسبة عن طريق المفتاح ON ، ثم الضغط على SHIFT و 9 لإظهار قائمة إعادة الضبط، كما هو موضح في الشاشة الأولى في الأسفل.

اضغط على 3 لإعادة تهيئة كل شيء ومن ثم انقر على مفتاح = لإتمام العملية. تعرض الشاشة الوسطى أعلاه الرسالة الناتجة عن ذلك، في حين يظهر على الشاشة الثالثة الإعدادات الافتراضية والتي تشمل الصيغة الطبيعية لمدخلات الرياضيات والدرجات من أجل قياس الزوايا، إضافة إلى خسارة كل العمليات التي جرت سابقا، وفقدان أية بيانات مخزنة في الآلة الحاسبة.

كما في الشاشة الظاهرة أعلاه، يمكنك فقط اختيار مسح الإعدادات/البيانات أو الذاكرة، عند الرغبة.

لا يحتاج كثيرون إلى إعادة ضبط آلتهم الحاسبة، بالتالي ليس عليك أن تفعل ذلك إن كنت لا تريد.

تمارين

الغرض الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة الخاصة بك.

1. استخدام الآلة حاسبة لإيجاد 78 + 77 + 760 + 75 + 74 + 73. يجب عليك الحصول على نتيجة 1137. ثم قم تغيير الرقم السابق من 760 إلى 76 وتحقق من أن المجموع بات الآن 453.

2. عبر عن الجذر التربيعي للرقم 32 بالعدد الدقيق و بالعدد العشري.

3. أوجد جتا $\cos 52^o$.

4. يمكن إيجاد وتر مثلث قائم أضلاعه 7 و 11 عبر حساب $\sqrt{7^2+11^2}$. عبر عن طول الوتر بعدد عشري.

5. استخدام الآلة الحاسبة لحساب $\frac{14}{17} \div \frac{22}{3}$ و من ثم عبر عن النتيجة بعدد كسري.

6. أوجد سبعة أس سبعة عشر مضافا إليها عشرة.

7. أوجد لوغاريتم $\log_3 81$.

8. عندما يقوم كل شخص في غرفة ما بمصافحة n من الأشخاص، فإن عدد المصافحات هو nC2. كم عدد المصافحات التي ستجري في الغرفة في حال كان هناك 38 طالبا ومدرس واحد؟

9. أحسب !38، ويمثل عدد طرق الاصطفاف المختلفة للطلاب خارج قاعة الدرس في السؤال السابق.

10. أوجد القيمة المطلقة لـ 7.81 – 3.4، والمعبر عنها رياضياً بـ $|3.4 - 7.81|$

11. استخدام الآلة الحاسبة لحساب $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ مقربا إلى ثلاث خانات عشرية.

12. أوجد $\left(\sqrt{4.1^2+5.3^2}\right)^5$.

13. كما كان مذكورا في الوحدة، بلغ عدد سكان الفلبين 852 337 92 في تعداد عام 2010. إذا كانت نسبة نمو السكان هي 2%، استخدم الآلة الحاسبة لمعرفة متى سيصل عدد السكان إلى 150 مليون نسمة. (تلميح: للقيام بذلك، أدخل أمرا وقم بتعديله تباعا حتى تصل للنتيجة المرجوة).

14. قم بتغيير وضعية الآلة الحاسبة إلى العرض الطبيعي على أن تكون الإجابة في الصيغة العشرية. تأكد من قيام ذلك بنجاح عبر حساب $\sqrt{50}$.

15. قم بتغيير إعدادات الآلة الحاسبة لإعطاء جميع النتائج مع منزلتين عشريتين. تأكد من نجاح ذلك من خلال إيجاد القيمة العشرية للجذر التربيعي للعدد 11.

16. أوجد الجذر التربيعي لـ 1.4×10^{17}، مستخدما مفتاح k لإدخال العدد.

17. قم بوضع الأعداد 7 و 8 و 9 في الذاكرات A، B و C على التوالي. ثم احسب قيمة AB^2C. قم بتغيير قيمة C إلى 5 ثم أعد حساب المقدار.

18. احسب مربع 34.5، لكن لا تكتب النتيجة. استخدام ذاكرة *Ans* لقسمة 8888 على النتيجة.

ملاحظات للمعلمين

تعتبر هذه الوحدة مهمة للمستخدمين الجدد لـ ClassWiz كونها تتعامل مع العديد من جوانب استخدام الآلة الحاسبة والتي من المفترض ألا يجري التحدث عنها في الوحدات التالية. إن الهدف مما هو مذكور هنا في هذه الوحدة هو أن يجري قراءته من قبل الطلاب لكي يساعدهم على البدء في رؤية كيفية استخدام الآلة الحاسبة بكفاءة لأنواع مختلفة من الحسابات.

اعتمادا على العمر وتطور الطلاب، يمكن حفظ بعض أجزاء المقدمة للاطلاع عليها لاحقا.

كمبدأ عام، يجب تشجيع الطلاب على النظر بعناية في شاشات آلاتهم الحاسبة والتأكد من أنهم يفهمون ما يرون. إحدى الاستراتيجيات الثمينة هي سؤال الطلاب تجاه التنبؤ بما سيحدث قبل الضغط على مفتاح = لاستكمال عملية حسابية حيث سيقوم التنبؤ بمساعدتهم على النظر بعناية ما تقوم به الآلة الحاسبة، ويعطيهم مشاركة (مهما كانت صغيرة) في رؤية الجواب الذي توقعونه إن كان صحيحا أم لا. في الواقع، يمكن أن يكون درسا قويا ومفيدا للطلاب من أجل تقديم تنبؤات قد تكون غير صحيحة وذلك على اعتبار أنها تشجعهم على معرفة لم كان تنبؤهم غير دقيق.

ومن المسلم به عموما أن يعمل الطلاب مع شركاء، وخاصة عندما يواجهون مشكلة وذلك لكي يتمكنوا من مناقشة أفكارهم معا والتعلم من بعضهم البعض.

إذا كان هناك محاكي وعارض بيانات متوفرين، قد تجد أنه من المفيد إستعراض بعض عمليات الآلة الحاسبة للقاعة دفعة واحدة، أو السماح للطلاب للقيام بذلك. حيث تعتبر فرصة جيدة لتأكيد الحاجة لفهم دقيق لما يظهر على الشاشة، و عمل نموذج لعملية تنبؤ آثار عملية معينة.

من الأفضل للطلاب الانتهاء من التمارين في ختام هذه الوحدة بشكل فردي لتطوير خبراتهم في استخدام الآلة الحاسبة بكفاءة. قدمنا إجابات موجزة على هذه التمارين في الأسفل لتسهيل العملية عليك حيث قد يميل بعض المعلمين لإعطاء الطلاب الإجابات جنبا إلى جنب مع التمارين لكي يتمكنوا من معرفة ما حققوه من تقدم والبحث عن المساعدة عند الضرورة. لك أن تختار ما تريد طبعا، وقد تجد أنه من الملائم عرض بعض التمارين أمام الجميع وذلك في حال كان كل من المحاكي وعارض البيانات متاحين.

ستضم الوحدات اللاحقة أيضا بعض الأنشطة للطلاب لاستكشافها، ولكن ركزت هذه الوحدة التمهيدية على التأكد من أن جميع عمليات الآلة الحاسبة العامة والإعدادات مفهومة جيدا لهم الأمر الذي سيجعل العمل مع المواضيع اللاحقة أكثر سرعة وكفاءة، كما قد يحاول الطلاب بأنفسهم العمل على استكشاف جوانب أخرى من الآلة الحاسبة بمفردهم. نقترح بدورنا أن يتم السماح لهم بالقيام بذلك إما بشكل فردي أو ضمن مجموعات حيث سيؤدي إجراء نشاطات من مثل هذا النوع إلى استخراج الكثير من النتائج القيمة.

أجوبة التمارين

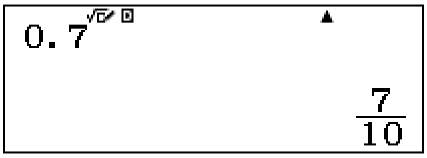
1. التحقق الذاتي. **2.** $4\sqrt{2}$, 5.657 **3.** 0.616 **4.** 13.038 **5.** $\frac{187}{21}, 8\frac{19}{21}$ **6.** $17^7 + 10 = 410\ 338\ 683$
7. 4 **8.** 39C2 = 741 **9.** 5.230×10^{44} **10.** استخدم (SHIFT من أجل الحصول على 4.41= $|13.4 - 7.81|$
11. استخدم = SHIFT من أجل الحصول على 3.146 بشكل مباشر **12.** 13 508.7714 **13.** استخدم 92337852 $\times 1.02^{20}$ وقم بتعديل الأس للحصول على أفضل تقريب ممكن: حوالي 25 سنة. بالتالي العام المطلوب هو عام 2035.
14. 7.071 (بدلا من $5\sqrt{2}$) **15.** 3.32 **16.** 374 165 738.7 **17.** 4032؛ بعد تخرين C = 5، استخدم E لتظليل التعبير ومن ثم انقر على = من أجل الحصول على النتيجة الجديدة البالغ مقدارها 2240. 18. بعد إيجاد مربع الرقم، استخدم $8888 \div Ans$ من أجل الحصول على 7.467.

الوحدة الثانية
تمثيل الأعداد

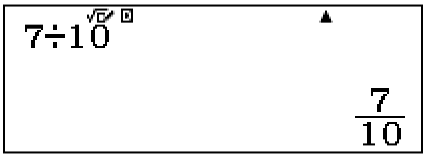
يمكن تمثيل الأعداد بعدة طرق مختلفة. حيث يمكنك استخدام ClassWiz لإظهار ذلك وبيان كيف أنها مرتبطة ببعضها البعض. في هذه الوحدة، سوف نستخدم وضعية الحساب، قم بالنقر على المفتاح [MENU] [1] للقيام بذلك. تأكد من تعيين الآلة الحاسبة الخاصة بك على وضع الرياضيات لكل من المدخلات والمخرجات (**رياضي/رياضي**) ونمط Norm 2. استخدم الإعدادات للقيام بذلك، إذا لزم الأمر.

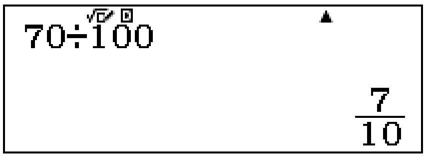
تمثيل الكسور العشرية

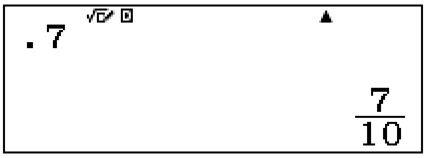
عندما تقوم بإدخال عدد عشري في الآلة الحاسبة ومن ثم النقر على مفتاح [=]، يتم عرض الرقم عادةً في شكل كسر. سوف تختار الآلة الحاسبة في العادة أبسط كسر ممكن له، وذلك كما في الشاشات أدناه.



كما يمكنك أن ترى، فإن كلا من العددين 0.7 و 0.70000 هما نفس العدد، بالتالي يمكن تمثيلهما بالكسر سبعة أعشار. هناك طرق أخرى لتمثيل نفس الرقم وذلك كما هو مبين أدناه.

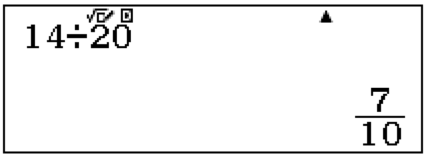


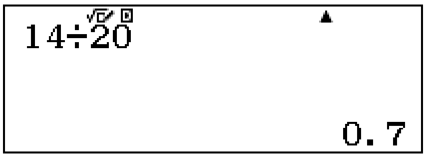




بالرغم من أننا لا ننصح بذلك، يقوم البعض أحيانا بكتابة الأرقام العشرية بين 0 و 1 من دون كتابة الصفر على اليسار (أي النقطة وبعدها العدد العشري) وذلك على النحو الوارد في الشاشة اليسرى أعلاه. حتى لو جرى الكتابة بمثل هذه الطريقة، ستمثل الآلة الحاسبة العدد بالشكل الصحيح.

إذا كنت تفضل أن يجري تمثيل الرقم بشكل عشري بدلا من كسر، يمكنك النقر على المفتاح [S⇔D] وذلك حالما يظهر الكسر أمامك. لاحظ أن النقر على المفتاح [S⇔D] مرة أخرى سيؤدي إلى عودة الرقم مرة ثانية إلى صيغة الكسر. تعرض الشاشتان الموجودتان في الأسفل هذه العملية بشكل أوضح: يمكنك الانتقال بين التمثيل العشري و التمثيل الكسري لناتج عملية 20 ÷ 14 عن طرق النقر على مفتاح [S⇔D] بشكل متكرر. لاحظ أن هذه طريقة أخرى لتمثيل نفس العدد.



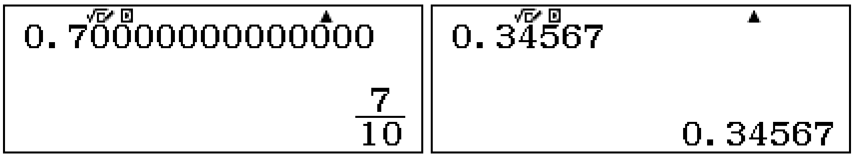


إذا كنت تعرف مسبقا أنك تريد عرض الأرقام بطريقة عشرية بدلا من كسرية (على سبيل المثال، في نهاية العملية حسابية)، يمكنك القيام بذلك مباشرة دون الحصول على الكسر أولا وذلك على النحو التالي: أدخل العدد ومن ثم انقر على مفتاح [SHIFT] قبل النقر على مفتاح [=]. (لاحظ رمز التقريب (≈) فوق مفتاح [=]) جرب هذا بنفسك.

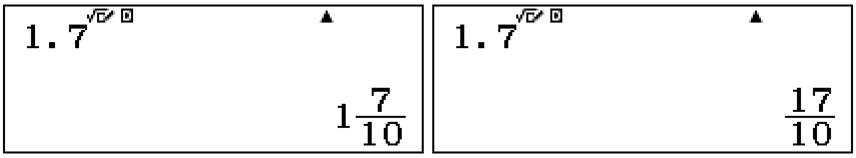
لن تعرض الآلة الحاسبة دوما العدد العشري ككسر. إذا كان مقام الكسر يتطلب أكثر من أربعة أرقام لعرضه، ستتحول طريقة العرض ببساطة إلى الطريقة العشرية. على سبيل المثال، في حال جرى تمثيل العدد 0.34567 بصيغة كسرية، سنحصل على كسر بمقام كبير:

$$0.34567 = \frac{34567}{100000}$$

في الآلة الحاسبة، العدد يظهر في الصيغة العشرية، لن يؤدي الضغط على الزر S⇔D لعرضه بشكل كسر وذلك كما نرى في الأسفل بل سيبقى بطريقة عشرية. لاحظ في الأسفل أيضا أن الرقم ذي الخانات العشرية الكثيرة سيبقى معروضا بشكل كسري، إذا كان المقام صغير بشكل كاف.

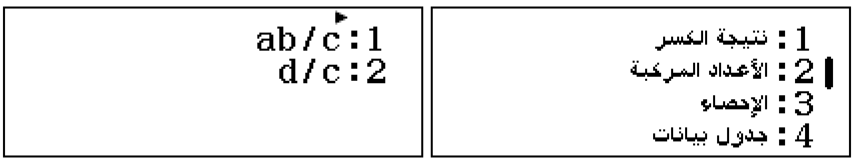


عندما يكون العدد العشري أكبر من واحد، فإن الكسر الذي يمثله يكون البسط فيه أكبر من المقام. بالتالي يمكن تمثيل مثل هذا النوع من الكسور بطريقتين مختلفتين: كسر صحيح وكسر غير صحيح. وتظهر الشاشتان الموجدتان في الأسفل كلا الاحتمالين:



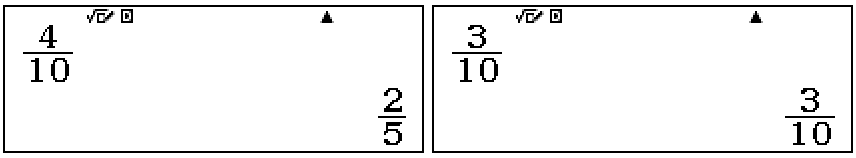
تعد كلتا الطريقتان صحيحتان لتمثيل العدد 1.7. في الشاشة الأولى (يمين) جرى تمثيله ككسر غير صحيح وفيه البسط أكبر من المقام، أما الشاشة الثانية (يسار) فتعرض الكسر كعدد مختلط (أي رقم صحيح + كسر). يمكن تغيير النسخة المعروضة من الأولى إلى النسخة الثانية عبر النقر على مفتاح SHIFT ومن ثم الضغط على مفتاح S⇔D ومن أجل التنقل بين الصيغتين استخدام الأمر ($a\frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c}$). إذا قمت بالنقر المتكرر على S⇔D SHIFT ، ستتمكن من الانتقال من شكل إلى آخر، ومن ثم اختيار الشكل الذي تفضل.

لتغيير الصيغة التلقائية المستخدمة من قبل الآلة الحاسبة، استخدم شاشة الإعدادات (SET UP)ومن ثم قم بالنقر على المؤشر ▼ للحصول على الشاشة الثانية. اضغط 1 لتحديد نتيجة الكسر. لاحظ أنه يمكنك استخدام 1 أو 2 للإختيار ما بين ab/c : 1 لإعطاء كسر حقيقي أو d/c : 2 لإعطاء كسر غير حقيقي في كل مرة، وذلك كما هو مبين في الشاشة أدناه. كرر العمليات الحسابية أعلاه للتحقق من أثر ما فعلت.

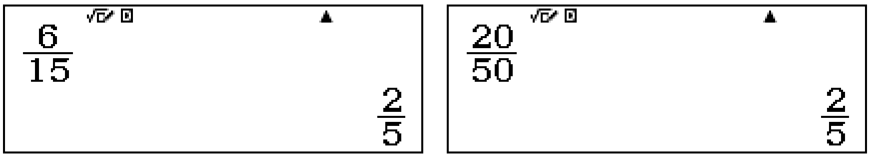


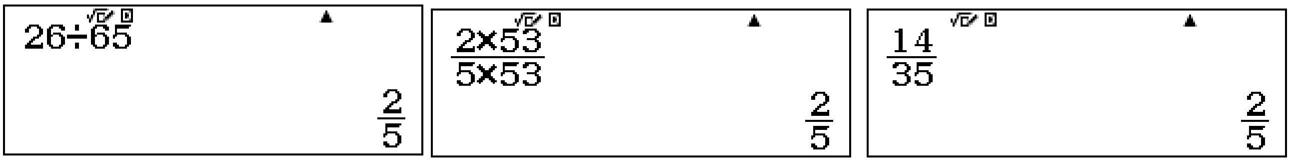
تمثيل الكسور

يمكن إدخال الكسور في الآلة الحاسبة باستخدام مفتاح ▭/▭ وسوف يتم عرضها ككسور عند النقر على مفتاح =. إذا كان الكسر في أبسط صورة، سيبقى على حاله عند النقر على مفتاح =. ولكن إذا كان يمكن تمثيل الكسر في صورة أبسط، ستقوم الحاسبة بعمل ذلك تلقائيا. تعرض الشاشتين التاليتين أمثلة على كل من هذين الاحتمالين.

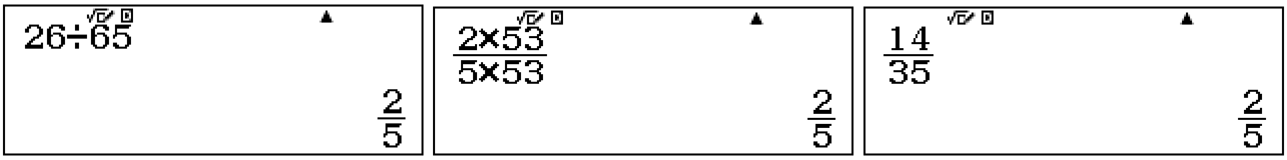


هناك العديد من الكسور المختلفة التي يمكن تمثيلها بكسر في أبسط صورة مثل الخُمسين. وهنا أربعة أمثلة إضافية حول هذه الفكرة:



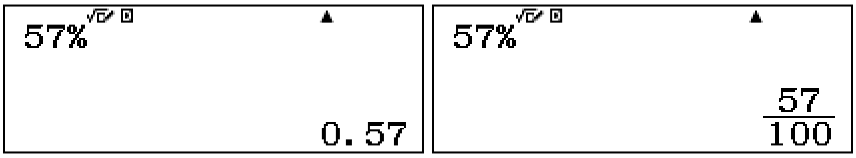


انظر إلى هذه الأمثلة بعناية. يمكنك ربما العثور على أمثلة أخرى كثيرة لكسور ستمثلها الآلة الحاسبة بخُمسين وذلك لأن كل هذه الكسور تمثل نفس العدد (الخُمسين أو 0.4) يجرى وصف هذه الكسور على أنها مكافئة لبعضها البعض. تعتبر الكسور المتكافئة مفيدة جدا في فهم كيفية عمل الكسور.

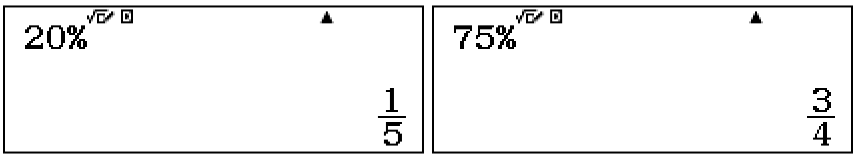


تمثيل النسب المئوية

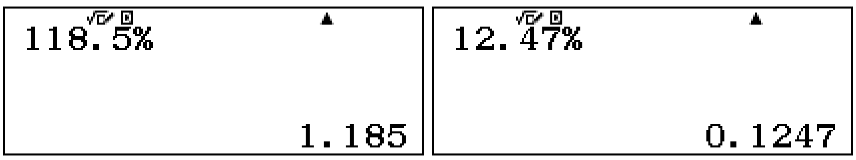
تعتبر النسب المئوية كسورا خاصة، حيث يكون مقامها 100. بالتالي فإن العدد 57% هو طريقة مختصرة لكتابة 57/100، وهو نفس العدد 0.57. يمكنك إدخال نسبة مئوية إلى الآلة الحاسبة باستخدام مفتاح (%) (الذي جرى الحصول عليه عبر النقر على الزرين SHIFT ثم Ans). لاحظ أدناه كيف أن التمثيل القياسي للنسبة 57%هو كسر، ولكن يمكنك الحصول على التمثيل العشري له باستخدام S⇔D.



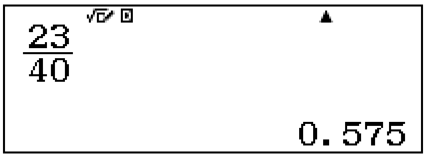
يمكن تمثيل بعض النسب المئوية بكسور مكافئة لها مقام أقل من 100، كما هو موضح في الشاشات أدناه. لا تمثل الآلة الحاسبة الرقم كنسبة مئوية بشكل تلقائي.



لاحظ في الأسفل كيف أن النسبة المئوية والكسور العشرية مرتبطان:



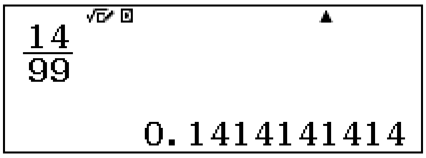
يكون الرقم قبل علامة النسبة المئوية دائما 100 مرة أكبر من التمثيل العشري (لأن النسبة المئوية هي كسر مقامه 100). لذلك، من أجل تمثيل الرقم كنسبة مئوية، يجب في البداية تمثيله كرقم عشري، ومن ثم ضربه بـ 100. يجب أن تكون قادرا على القيام بالخطوة الأخيرة ذهنيا.

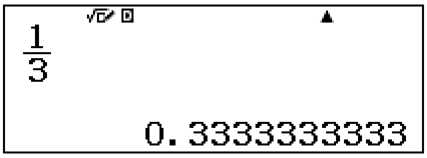


في المثال أعلاه، لمعرفة ما هي النسبة المئوية لـ 23 من أصل 40، الآلة الحاسبة تبين أن 23/40 هو 0.575، بالتالي يجب أن تكون قادرا على رؤية أن هذا الرقم يكافئ النسبة المئوية 57.5%.

التكرار العشري

ربما لاحظت بالفعل أنه عندما يجري تمثيل العديد من الكسور بصيغة عشرية، تحتاج الآلة الحاسبة لكامل الشاشة من أجل عرضها. يعود السبب في كثير من الأحيان إلى أنها كسور عشرية متكررة (أو مكررة) تملك منازل عشرية لا حصر لها (لانهائية). إليك هذين المثالين:



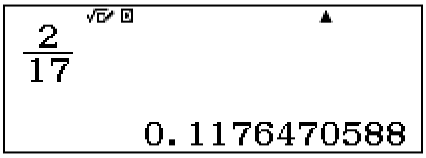


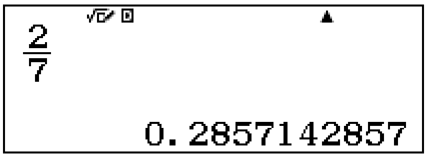
تملك الآلات الحاسبة (وأجهزة الكمبيوتر) في العادة عدد محدد من الخانات لتمثيل الأعداد، لذلك لا يمكن تمثيل الأعداد الغير منتهية بشكل كامل. نرى في هاتين الحالتين أنماط تكرار معنية مستمرة. في الاصطلاح الرياضي، غالبا ما يتم تمثيل الكسور العشرية المتكررة بالرقم (الأرقام) المتكررة وشريط (أو نقاط) على الجزء المتكرر منها. في هذه الحالة، يمكن عرض الرقمين الموجدين في الأعلى بالشكل التالي.

$\frac{14}{99}=0.\overline{14}$ و $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$

لا تضيف الآلة الحاسبة تلك الرموز في العادة: ستحتاج إلى القيام بذلك بنفسك.

في كثير من الأحيان، يجب تأويل نتيجة الآلة الحاسبة بطريقة أكثر دقة من المثالين السابقين وذلك من أجل اكتشاف وجود تكرار عشري. بالتالي يجب عليك القيام ببعض التفكير الرياضي أو الاستكشاف من أجل معرفة ذلك. إليك الآن مثالين أكثر صعوبة مما سبق.

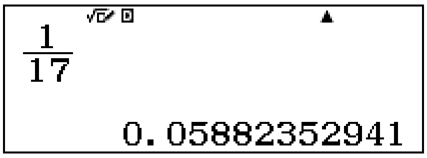


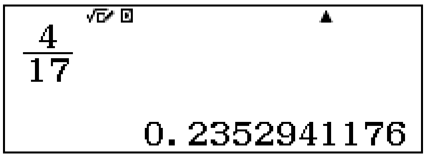


يعتبر المثال الأول أسهل تأويلا من الثاني حيث في الأول هناك تكرر للأرقام (285714)، والذي يقترح بأن التمثيل العشري هو

$$\frac{2}{7}=0.285714285714285714285714285714\ldots=0.\overline{285714}$$

إلا أنه في الحالة الثانية، لم تتكرر أي من الأرقام المعروضة في النتيجة. ومن أجل رؤية النمط المعروض، حاول معاينة كسور أخرى ذات نفس المقام (وهو 17)، كما سنرى في المثالين القادمين.



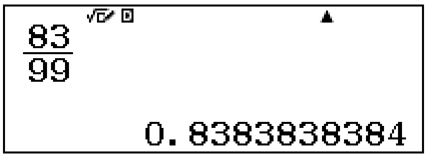


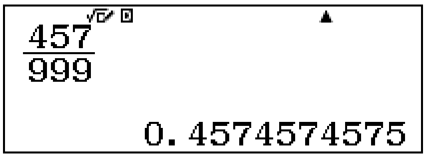
إذا نظرت إلى الشاشات الثلاث بعناية، ستتمكن من رؤية نمط من الأرقام المتكررة والتي هي أكبر من أن يتم عرضها على شاشة آلة حاسبة واحدة.

$$\frac{2}{17} = 0.117647058823529411764705882352941176... = 0.\overline{1176470588235294}$$

في مثل هذه الحالة، تجربة بسيطة أظهرت النمط الموجود والذي يمكن العثور عليه لأن جميع الكسور لها نفس المقام 17 وتملك نفس الأرقام المتكررة. (لا تتصرف كل الكسور بهذه الطريقة. بالتالي عليك القيام ببعض التجارب الإضافية معها).

في بعض الأحيان، سيتم تقريب الأرقام العشرية لتحتويها الشاشة، وهو الأمر الذي يتطلب منك النظر بعناية إلى ما تراه. فيما يلي مثالين تم فيهما تقريب الرقم النهائي، ولكن ما تحتاج فهمه هنا هو فقط طريقة عمل الآلة الحاسبة وذلك لكي تتمكن من تأويل الشاشة بشكل صحيح.





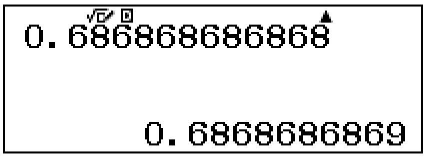
في هذه الحالة، التمثيلات الصحيحة هي $\frac{83}{99} = 0.838383838383838383... = 0.\overline{83}$

و $\frac{457}{999} = 0.457457457457457457... = 0.\overline{457}$

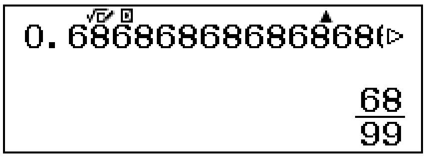
قد تحتاج أيضا إلى التفكير مليا في التقريب عند تحويل الأرقام العشرية المتكررة إلى كسور. تعرض الآلة الحاسبة عشرة خانات عشرية في العادة، إلا أنها سوف تسمح لك بإدخال خانات أكثر الأمر الذي يعد ضروريا في بعض الأحيان. على سبيل المثال، إذا قمت بإدخال العدد العشري 0.686868686868 ذي الاثني عشر منزلة عشرية ومن ثم ضغطت على =، ستقوم الآلة الحاسبة بتفسيره بالشكل العشري التالي

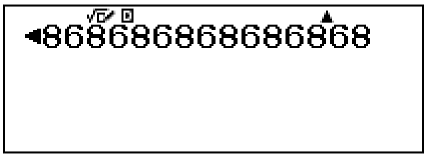
$$\frac{686868686868}{1000000000000} = 0.686868686868$$

وهكذا تقوم بتقريبه لعشر خانات من أجل عرضه 0.6868686869 كما هو موضح في الأسفل. يعتبر هذا أمر مناسبا تماما على اعتبار أن العدد العشري الذي جرى إدخاله ليس في الواقع عدد عشري مكرر (ينتهي فعليا بعد 12 منزلة عشرية.)



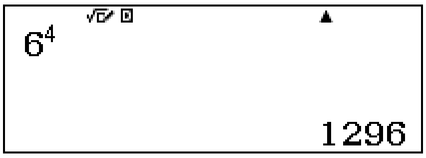
ومع ذلك، يمكنك إدخال منازل أكثر للأعداد العشرية المتكررة، وذلك على الرغم من أنه لا يمكن إحتواء جميع الخانات على شاشة الآلة الحاسبة، كما نرى في الشاشة الأولى في الأسفل (لاحظ السهم الموجود على يسار الرقم). عند النقر على ⊟، فإن الآلة الحاسبة ستقوم الآن بتأويل العدد المدخل على أنه عدد عشري مكرر لـ 68/99، وهو $0.\overline{68}$. لاحظ الأسهم على يمين الرقم في الشاشة الثانية أدناه. قم بتجربة هذه الفكرة بنفسك.



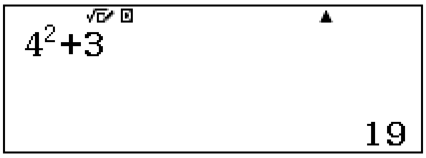


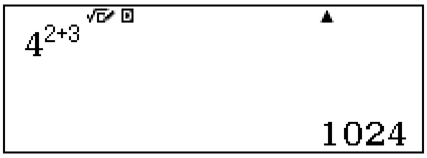
الأسس

يمكن استخدام الأسس عندما يجري ضرب عدد واحد بنفسه بشكل متكرر. بالتالي، 6 x 6 x 6 x 6، تقرأ ستة أُس أربعة (بضم الألف) وتكتب 6^4. يوجد مفتاح خاص في الآلة الحاسبة لحساب الأسس هو $x^{\blacksquare}$. ومن أجل استخدامه عليك أولا إدخال الأساس (في هذه الحالة الرقم 6) ثم الضغط على $x^{\blacksquare}$ ثم إدخال الأس وهو 4. لاحظ أن الأس مكتوب بخط أصغر قليلا من الأساس. اضغط على = لترى النتيجة، كما هو مبين أدناه.



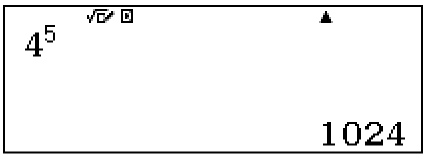
إذا كان الأس أكثر من عدد واحد، يمكنك إدخاله مباشرة على الآلة الحاسبة. على سبيل المثال، انظر بعناية إلى الشاشة الأولى أدناه، والتي تدل على العدد 4 مرفوع لأُس 3 + 2.

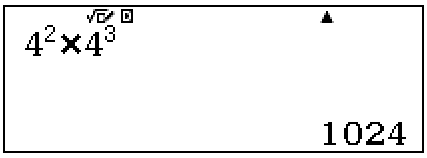




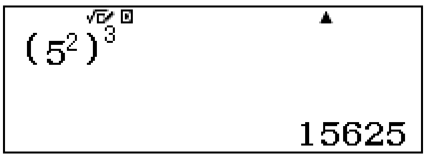
إذا كنت ترغب في القيام بعمليات حسابية تتضمن الأسس، فقد تحتاج لتحريك مؤشر الآلة الحاسبة خارج الأس، وذلك باستخدام مفتاح ▶، من أجل استكمال كتابة الأس ومن ثم استكمال العملية الحسابية. لاحظ في الأعلى وجود فرق مهم بين 4^{2+3} وبين $4^2 + 3$ يعني التعبير الأول 4 x 4 x 4 x 4 x 4، في حين يعني التعبير الثاني 3 + 4 x 4، وهو بالطبع مختلف تماما.

من العلاقات الرياضية المهمة هي أنه عندما يتم ضرب أعداد أسية لها نفس الأساس، فإنه يجري جمع الأسس. على سبيل المثال $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$. انظر بعناية إلى الشاشات أدناه لرؤية كيفية تمثيل هذه العمليات في الآلة الحاسبة. سوف تحتاج إلى استخدام مفتاح ▶ قبل إدخال علامة الضرب.



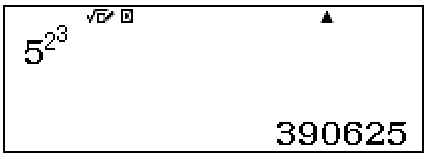


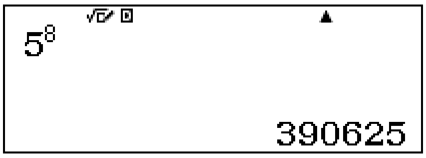
يمكن رفع الأسس نفسها على الآلة الحاسبة، ولكن عليك أن تكون حذرا في إدخال هذه التعبيرات بشكل صحيح. على سبيل المثال، الأسس الثالث للعدد 5^2 هو $5^2 \times 5^2 \times 5^2$، والذي يمكن كتابته $(5^2)^3$. سوف تحتاج هنا إلى إدخال الأقواس على الآلة الحاسبة وأيضا النقر على مفتاح ▶ بعد إدخال الأس الأول وقبل إغلاق القوس كما هو موضح في الأسفل.



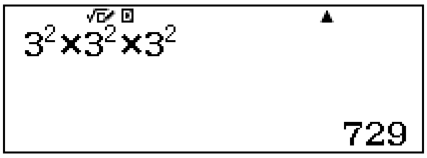
تحقق بنفسك من أن النتيجة هي نفسها 5^6، بما أن الأسس يتم جمعها، وذلك كما نوهنا سابقا: 2
6 = 2 + 2 +. لاحظ كيف أنه يجري ضرب الأسين في هذه الحالة: 6 = 3 x 2 = 2 + 2 + 2. تحقق بنفسك أيضا من أن $(5^3)^2$ تعطي نفس نتيجة $(5^2)^3$، على اعتبار أن 3 x 2 = 2 x 3.

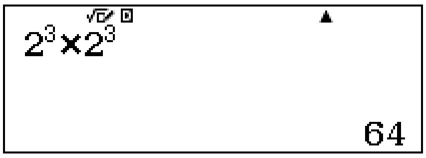
إذا تم حذف الأقواس، ستفترض الآلة الحاسبة أن الأس على العدد الذي يسبقه مباشرة، وبالتالي فإن المقدار أدناه، تم الحصول عليه بالنقر على المفتاح $x^{\blacksquare}$ مرتين على التوالي. أي أن العدد سيجري تأويله على أنه 5 للأس 2^3 أو 5 للأس 8.



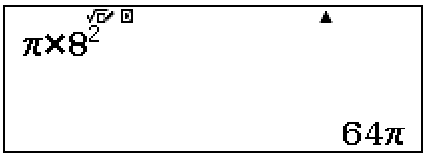


على الرغم من أنه يمكنك دائما استخدام مفتاح $x^{\blacksquare}$ لحساب الأسس، من المناسب أحيانا استخدام المفاتيح الخاصة x^2 و x^3 للحصول على الأسس التربيعية و التكعيبية، على الترتيب. لاحظ أن مفتاح التكعيب يتطلب منك النقر على SHIFT ثم x^2. تعطي هذه الأوامر في العادة نفس النتائج فيما لو جرى استخدام مفتاح الأس $x^{\blacksquare}$ (وذلك على الرغم من أنه يجري حسابها بشكل مختلف قليلا من قبل الآلة الحاسبة)، ولكنها في الوقت ذاته مفيدة لأنه من غير الضروري استخدام مفتاح ▶ لتقييم التعبيرات المعقدة. على سبيل المثال، في كل من الشاشتين التاليتين في الأسفل، كان من غير الضروري استخدام مفتاح ▶.

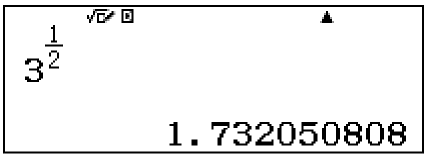


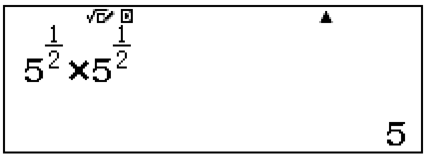


تعد هذه الأوامر مفيدة لحساب التعابير الرياضية التي تنطوي على الأسس التربيعية والتكعيبة، على سبيل المثال لإيجاد المساحات والحجوم. يظهر على الشاشة أدناه استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد مساحة الدائرة التى نصف قطرها 8 سم.



قد تتفاجأ بمعرفة أنه ليس من الضروري أن يكون أس العدد رقما صحيحا حيث يمكنك استخدام كسور وأرقام عشرية. من أبرز الأمثلة على ذلك الأس نصف، المبين أدناه، حيث تحقق ذلك باستخدام مفتاح الكسر ▤ بعد مفتاح الأس $x^{\blacksquare}$في كل شاشة. في الشاشة الثانية، كن حذرا واستخدم المفتاح ▶ مرتين لتحريك مؤشر الآلة الحاسبة من الكسر وثم من الأس وذلك قبل النقر على علامة الضرب.





لاحظ وبشكل خاص كيف أن الشاشة الثانية تعرض مرة أخرى القاعدة التي تقول أن الأسس يتم جمعها في حالة تساوي الأساسات، في هذه الحالة نحصل على النتيجة $5 = 5^1 = 5^{½+½} = 5^{½} \times 5^{½}$.

التحليل الى العوامل الأولية

عوامل العدد الكلي هي مجموعة الأعداد التي يقسمها العدد من دون باقي. على سبيل المثال، عوامل العدد 12 هي 1، 2، 3، 4، 6, و12. تملك معظم الأعداد الكلية عدة عوامل (وتسمى الأعداد المركبة)، في حين أن بعضها لا يملك إلا عاملين: العدد نفسه والعدد 1. وتسمى هذه بالأعداد الأولية، وتعتبر مهمة جدا في الرياضيات وخاصة في فرع الرياضيات المسمى نظرية الأعداد.

بعض الأعداد الأولية، على سبيل المثال، 2، 3، 5، 7، 11، 13، ... .

لدى الآلة الحاسبة أمر خاص ويدعى FACT مهمته تمثيل الأعداد كحاصل ضرب عواملها الأولية. على سبيل المثال، تعرض الشاشة الأولى أدناه ناتج حاصل ضرب عددين كليين وهو العدد 664 20، عدد كلي آخر. بعد الحصول على هذا العدد، اضغط على المفتاحين SHIFT °''' من أجل الوصول إلى الأمر FACT من أجل الحصول على العوامل الأولية للعدد وذلك كما هو مبين في الشاشة الثانية.

$56\times369 \quad\rightarrow\quad 2^3\times3^2\times7\times41$ | $56\times369 \quad\rightarrow\quad 20664$

على اعتبار أن العدد 1 ليس عددا أولياً، لا يتم تضمينه كأحد العوامل الأولية. يمكن للعدد الصحيح الموجب أن يمثل كناتج مجموعة واحدة فقط من الأعداد الأولية (توصف في الرياضيات على أنها عوامل فريدة) وهو الأمر الذي لا يمكنه اعتباره هكذا في حال جرى اعتبار العدد 1 كعدد أولي.

من أجل التحقق من هذه العوامل، يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لضرب هذه الأعداد الأولية مع بعضها البعض:

$2^3\times3^2\times7\times41 \quad\rightarrow\quad 20664$

يمكنك استخدام هذا الأمر لاستكشاف كيف يتم ضم أسس الأعداد الكلية سواء في حالة الضرب أو القسمة، كما هو مبين أدناه:

$6^5\times6^4 \rightarrow 2^9\times3^9$ | $\dfrac{7^8}{7^3} \rightarrow 7^5$ | $11^4\times11^5 \rightarrow 11^9$

لاحظ الفرق بين المثالين الأول والثالث في الأعلى: لا تقوم الآلة الحاسبة بتمثيل ناتج $6^5 \times 6^4$ على أنه 6^9، على اعتبار أن العدد 6 ليس عددا أوليا. بدلا من ذلك، تمثل النتيجة في ضوء العوامل الأولية والتي هي 2 و 3. أما الشاشتين التاليتين فتعرضان كيف تمثل الآلة الحاسبة الأعداد كحاصل ضرب عواملها الأولية. قم بدراستها مليا لمعرفة كيفية القيام بذلك.

$7\times60^5 \rightarrow 2^{10}\times3^5\times5^5\times7$ | $45^4 \rightarrow 3^8\times5^4$

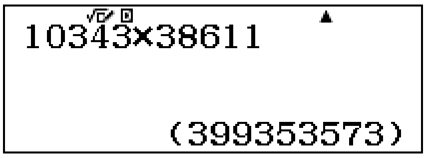
غالبا ما يكون من الصعب تحديد عوامل الأعداد الصحيحة (كتلك المستخدمة من قبل أجهزة الصراف الآلي وأجهزة أخرى تضمن أمن الإنترنت)، ولن تكون الآلة الحاسبة قادرة أيضا على القيام بذلك لبعض الأعداد الكبيرة. هناك ثلاثة أمثلة على أعداد كبيرة أدناه، وذلك بعدما تم استخدام الأمر FACT.

$6389657168 \rightarrow 2^4\times(399353573)$ | $80263\times79609 \rightarrow (6389657167)$ | $6389657166 \rightarrow 2\times3\times59\times(18049879)$

في المثال الأول، نرى عدم قدرة الآلة الحاسبة على العثور على جميع العوامل الأولية للعدد 6389657166 لأنه لا يمكن تحديد فيما إذا كان العدد 18049879 هو عدد أولي أم لا حيث يظهر هذا العدد بين قوسين. أما في

الشاشة الثانية، فإن الآلة الحاسبة غير قادرة على تحديد العوامل الأولية للعدد 167 657 389 6 وذلك على الرغم من أن العدد هو نتيجة حاصل ضرب عددين أوليين كبيرين هما 263 80 و 609 79. وبشكل مشابه، حددت الآلة الحاسبة في الشاشة الثالثة أن العدد 168 657 389 6 لديه أربعة عوامل أولية من العدد 2، لكنها لم تكن قادرة على تحديد إذا ما كان العدد 573 353 399 عددا أوليا أم لا، وبالتالي وضعته بين قوسين.

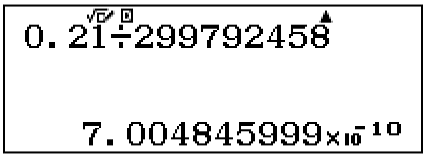
من المهم تأويل هذه العروض بشكل صحيح: قد تكون الأعداد الواردة بين القوسين أعداداً أولية، ولكن قد تكون أيضا أعداداً مركبة. إن الآلة الحاسبة هنا غير قادرة على تحديد أيهما هو الجواب الصحيح. في هذه الحالة، العدد الموجود بين قوسين في الشاشة الأولى هو عدد أولي، في حين أنه في الشاشة الثالثة ليس عددا أوليا، كما هو مبين أدناه، لكن الآلة الحاسبة لم تكن قادرة على العثور على عوامله.

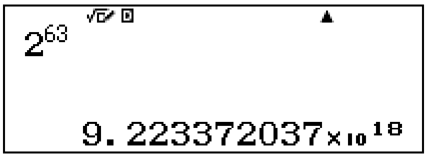


وبالمثل، إذا كانت الأعداد كبيرة بحيث يمكن تمثيلها على الآلة الحاسبة باستخدام الصيغة العلمية فقط، لن تتمكن آلة ClassWiz الحاسبة من العثور على عواملها الأولية.

الصيغة العلمية

كما رأيت في الوحدة 1، يمكنك استخدام الإعدادات لعرض الأرقام بالصيغة العلمية. ومع ذلك، عندما تكون الأعداد كبيرة جدا أو صغيرة جدا ليتم عرضها بحالتها العشرية أو الكسرية، تقوم الآلة الحاسبة تلقائيا بكتابتها بالصيغة العلمية. على سبيل المثال، هناك حكاية مشهورة عن مخترع الشطرنج، الذي طلب مكافأة من مقدارها حبة أرز على أول مربع، ثم ضعفها على المربع الثاني، ثم ضعف المربع الثاني على المربع الثالث، وهلم جرا وذلك لكل المربعات الـ 64. ويظهر الناتج الإجمالي لحبات الأرز كما هو موضح في الأسفل.





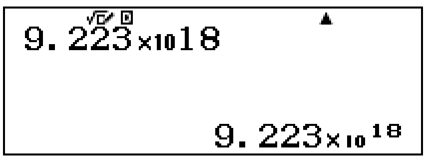
وبشكل مشابه، مع افتراض أن الضوء ينتقل بسرعة 458 792 299 متر في الثانية الواحدة، فإن عدد الثواني اللازمة لإنتقال الضوء عبر صفحة A4 بعرض 210 ملم مذكور في الشاشة الأعلى يسار. في كل حالة، قامت الآلة الحاسبة بكتابة النتيجة بالصيغة العلمية.

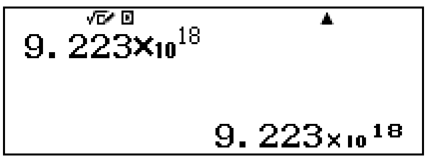
كلا الجوابين مقرّبين على اعتبار أن للآلة الحاسبة عدد محدود من الخانات التي يمكنها أن تظهر. بالتالي، فإن النتيجة رقعة الشطرنج هي 000 000 000 000 000 000 1 x 9.223372037

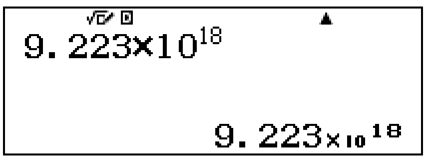
أو $9.223372037 \times 10^{18} = 9\ 223\ 372\ 037\ 000\ 000\ 000$

إن النتيجة الصحيحة في الواقع (أكبر من قدرة الآلة الحاسبة على عرضها) وهي 9
808 775 854 036 372 223 حيث قامت الآلة بتقريبها.

يمكن إدخال الأرقام في الحاسبة مباشرة بالصيغة العلمية، وذلك باستخدام مفتاح الضرب ومفتاح الأس أو مفتاح الأس الخاص للأساس عشرة. ولكن الأكثر كفاءة استخدام زر الكتابة العلمية الخاص ×10ˣ بدلا من ذلك. والطرق الثلاث معروضة أدناه.

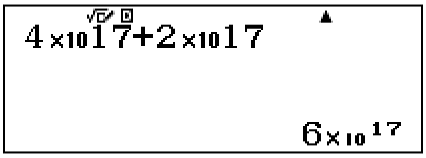


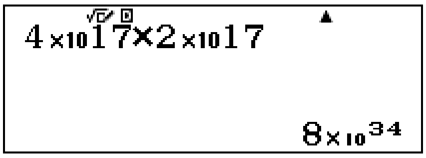


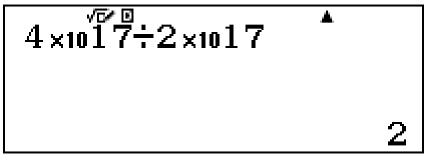


بعد إدخال 9.223، تعرض الشاشة الأولى إلى اليسار [×] [1] [0] [$x^■$] [1] [8] [=]، أما شاشة المنتصف فتعرض [×] [SHIFT] [log] [1] [8] [=]، في حين تعرض الشاشة إلى اليمين [×10ˣ] [1] [8] [=]. هي نفس النتائج، ولكن عدد المفاتيح اللازمة لتدوينها مختلفة في كل حالة. لا يتطلب مفتاح الكتابة العلمية استخدام مفتاح منفصل عن علامة الضرب أو الأس، وهذا هو السبب في أنه أكثر كفاءة. لاحظ كيف أن شاشة العرض لا تعرض الأس 10 على أنه أس بالرغم من أن النتيجة تشير إلى أن الآلة الحاسبة فسرته بشكل صحيح.

إدخال الأعداد بطريقة الصيغة العلمية باستخدام المفتاح [×10ˣ] يساعد على رؤية كيف تتأثر أسس العدد 10 بالعمليات الحسابية. قم بدراسة الشاشات الموجودة في الأسفل بعناية لرؤية أمثلة على ذلك فيما يتعلق بالجمع والضرب والقسمة لكل من 4×10^{17} و2×10^{17} .

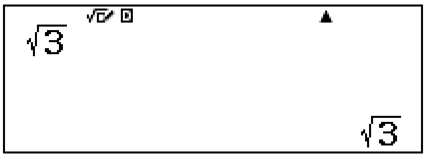


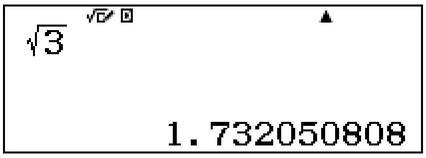




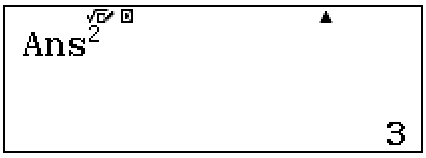
الجذور

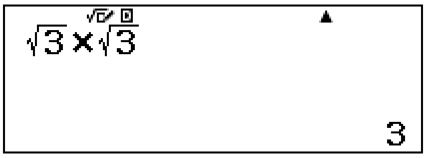
إن جذر عدد ما هو العدد الذي يُضرب بنفسه عددا من المرات للوصول إلى العدد الأصلي. إن الجذر التربيعي لعدد على سبيل المثال، يمكن تربيعه للحصول على الرقم نفسه. يستخدم زر الجذر التربيعي في الآلة الحاسبة [√■] من أجل إيجاد الجذور التربيعية. لاحظ في الشاشة الأولى أدناه كيف أن الجذر التربيعي للعدد 3 معطى كنتيجة قياسية، أو يمكنك الاستفادة من مفتاح [S⇔D] للحصول على تقريب رقمي. (بدلا من ذلك، يمكنك استخدام [SHIFT] [=] للحصول على تقريب رقمي مباشرة).





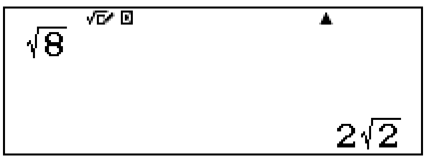
في كلتا الحالتين، يمكنك التحقق من صحة الجذر التربيعي مباشرة من خلال النقر على مفتاح [x^2] أو القيام بضرب العدد بنفسه. تعرض الشاشتين أدناه كلتا الطريقتين. (عليك استخدام مفتاح [▶] للخروج من علامة الجذر √ في المثال الثاني).

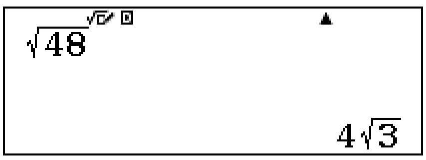


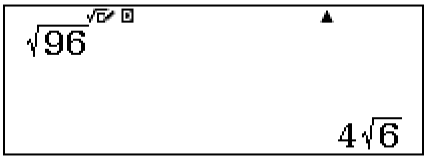


لاحظ أن الآلة الحاسبة تقوم بحساب مربع الإجابة الأخيرة (والتي ندعوها *Ans*) وذلك عند الضغط على مفتاح [x^2]. وتكون النتيجة هي 3 على اعتبار أنه عندما يتم تربيع الجذر التربيعي للعدد 3 فإنه يعطي 3، باستخدام التعريف. كما ربما قد لاحظت أيضا أنه قد جرى الحصول على الجذر التربيعي للعدد 3 في الفصل السابق عبر إيجاد $3^{½}$. قم بالتحقق من ذلك من خلال مقارنة الإجابات.

يمكنك رؤية بعض خصائص الجذور التربيعية من خلال إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة:







لدى الآلة الحاسبة أيضا أمرا مباشرا للجذور الأخرى علاوة على الجذر التربيعي. تتوفر عملية الحصول على الجذر التكعيبي مباشرة عند الضغط على ($\sqrt[3]{■}$) متوفر من خلال [SHIFT] [√■] ، بينما تتوفر باقي أنواع الجذور الأخرى

لدى الضغط على مفتاح ($\sqrt[\blacksquare]{\square}$) الذي يمكن الوصول إليه عبر الضغط على SHIFT $x^{\blacksquare}$. تعرض الشاشتين في الأسفل هذين الأمرين؛ لاحظ العلاقة بين الجذور والأسس الموضحة في الشاشتين التاليتين لهما.

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \sqrt[5]{32} = 2 \qquad 2^5 = 32$$

وعلى عكس أوامر الجذور التربيعية، توفر الآلة الحاسبة التقريب العددي للجذور الأخرى ما لم يكونوا أعداداً كلية كما هو موضح في الأعلى.

ستجد أيضا إمكانية تنفيذ كل الحسابات التي تتضمن الجذور، الأسس والكسور على الآلة الحاسبة، وذلك على الرغم من الحاجة إلى مفاتيح المؤشر من أجل التحرك ووضع الأقواس لإنشاء التعابير الرياضية بالشكل الملائم. إليك الآن مثالين أكثر تعقيدا مما سبق:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \qquad \left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^3 = 125$$

مقلوب العدد

يستخدم مفتاح خاص هو x^{-1} من أجل إنشاء المعكوس الضربي لعدد ما أو مقلوبه. يظهر المثالان أدناه آثار استخدام هذا المفتاح:

$$17^{-1} = \frac{1}{17} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$$

من الممكن أيضا استخدام مفتاح الأس $x^{\blacksquare}$ مع أس سالب، وذلك عبر استخدام (−) ، بدلا من مفتاح x^{-1}. يعتبر استخدام مفتاح $x^{\blacksquare}$ الطريقة الأسهل للحصول على قوى سالبة للأعداد وذلك كما هو موضح أدناه.

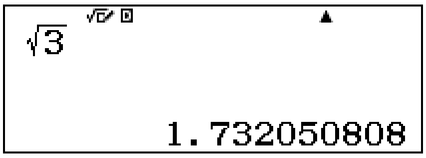
$$5^{-2} = \frac{1}{25} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

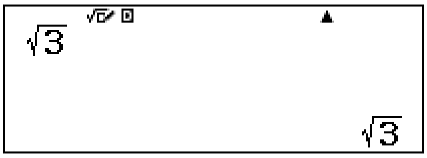
الأعداد النسبية وغير النسبية

إن *الأعداد النسبية* هي تلك الأعداد التي يمكن التعبير عنها عن طريق نسبة لعددين كليين. وقد تكون كسور، أو أعداد عشرية منتهية أو أعداد كلية مثل 3، ¾، 16% أو 3.725. وتدعى الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بهذه الطريقة باسم *الأعداد غير النسبية*. أمثلة على هذه الأعداد الجذور، اللوغاريتمات، والنسب المثلثية إضافة إلى الأرقام الخاصة مثل العدد π. وعندما يجري تمثيلها بأعداد عشرية، تتحول الأعداد غير النسبية إلى أعداد عشرية غير منتهيه من دون أي تكرار للخانات.

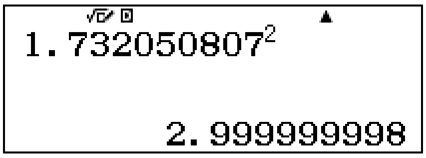
في الآلة الحاسبة، تمثل الأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{3}$، $2^{1.2}$ وπ تماما عن طريق التدوين الرياضي القياسي أو تقريبيا عن طريق استخدام الأعداد العشرية. من المهم إدراك أن التقريب العشري يعطي فقط أول منازل عشرية من عدد لا نهائي من المنازل العشرية، وهو ليس دقيقا. وهذا ليس بسبب القيود الموجودة على الآلة الحاسبة – حيث أن أكبر حاسب عملاق سيعاني من هذه المشكلة.

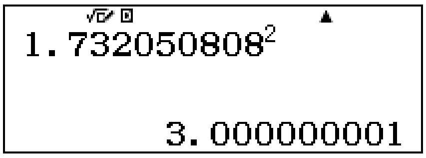
يمكنك استخدام الآلة الحاسبة الخاصة بك للتأكد من التقريب الرقمي لعدد غير نسبي على الآلة الحاسبة هو مجرد تقريب رقمي. تعرض الشاشات في الأسفل كل من القيمة الدقيقة والتقريب لـ $\sqrt{3}$، كما لاحظنا ذلك في هذه الوحدة سابقا.





إذا أدخلت الآن التقريب كخانات عشرية، وقمت بتربيع النتيجة، سترى أن تقريب الآلة الحاسبة كبير للغاية:

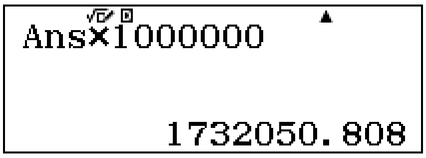


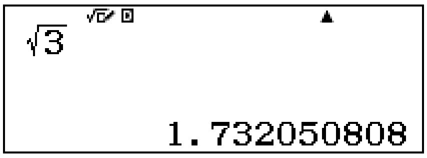


ومع ذلك، إذا عرضت الآلة الحاسبة أصغر تقريب تالي من أجل $\sqrt{3}$، مع نفس رقم المنازل العشرية، تعرض الشاشة اليمنى في الأعلى كيف يبدو صغيرا. بالتالي فإن التقريب هو أفضل ما هو متاح لعدد المنازل العشرية المتاحة. توضح هاتين الشاشتين بشكل واضح أن $1.732050808 > \sqrt{3} > 1.732050807$. تعرض الآلة الحاسبة 1.732050808 في إشارة إلى أن العدد العشري اللانهائي هو أقرب إلى1.732050808 منه إلى 1.732050807.

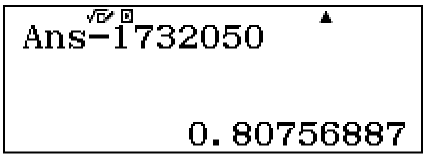
تخزن الآلة الحاسبة أرقاما أكثر مما تعرضه، وذلك بالرغم من أنها في الوقت ذاته لا يمكنها تخزين عدد لا نهائي من الخانات العشرية اللازمة لتخزين عدد غير نسبي مثل العدد $\sqrt{3}$ تماما.

يمكنك استخدام خدعة صغيرة لرؤية المنازل العشرية المخفية المخزنة في الآلة الحاسبة وذلك عبر القيام أولا بضرب القيمة بمضاعفات الرقم عشرة ومن ثم طرح الجزء الصحيح بحيث لا يبقى سوى المنازل العشرية. على سبيل المثال، ضرب القيمة التقريبية بمليون يعطينا نفس الخانات العشرية:



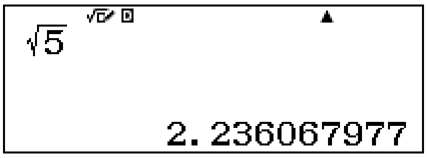


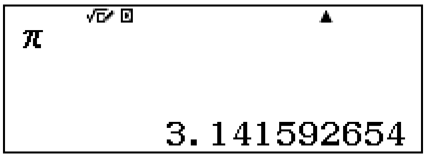
نقوم الآن بطرح الجزء الصحيح وهو 050 732 1من أجل رؤية الخانات العشرية الأخرى والتي كانت مخفية سابقا في داخل الآلة الحاسبة والتي لم يجر عرضها بسبب محدودية شاشة الآلة الحاسبة.



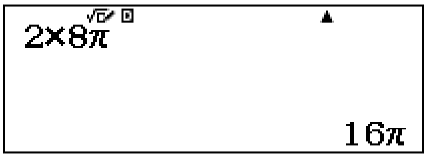
يدل هذا على أن الآلة ClassWiz تعمل مع قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{3}$ هي بحدود $\sqrt{3} \approx 1.73205080756887$ داخليا، ولكنها تعرض فقط نتيجة 1.732050808 على الشاشة. يفسر هذا لم أعطت نتيجة دقيقة على مايبدو سابقا عندما جرى استخدام المفتاح $\boxed{x^2}$ من أجل تربيع الجذر التقريبي. بالطبع، تظل أكثر التقريبات دقة إلى الأعداد غير النسبية المستخدمة داخليا هي ما تزال فقط تقريبات، لأن عدد الخانات العشرية المطلوبة من أجل العدد غير النسبي هو لا نهائي.

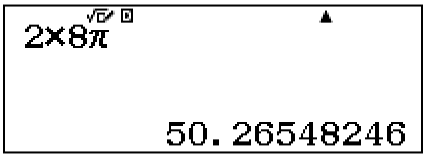
يمكنك استخدام طريقة مماثلة لترى بنفسك أن الآلة الحاسبة تستخدم $\sqrt{5} \approx 2.23606797749978$، وذلك بالرغم من أنها تعرض فقط $\sqrt{5} \approx 2.236067977$ وتستخدم $\pi \approx 3.1415926535898$ وذلك بالرغم من أنها تعرض فقط $\pi \approx 3.141592654$.



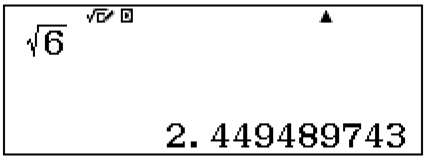


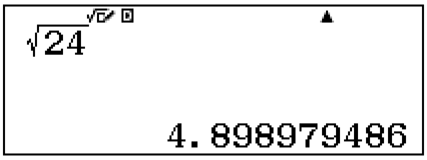
في الممارسة العملية، وفي العمليات الحسابية اليومية، فقط عدد قليل من المنازل العشرية يمكن استخدامه لتقريب النتائج غير النسبية. على سبيل المثال، قد نختار التعبير عن محيط دائرة نصف قطرها 8 سم على أنه 50.3 سم وذلك إلى أقرب 0.1 سم بدلا من القيمة الدقيقة الصحيحة غير النسبية وهي 16π سم.

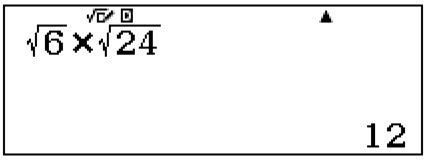




قد تتفاجأ من إدراك ذلك، وذلك على الرغم من أن الأرقام غير النسبية يمكن تمثيلها بشكل أرقام عشرية تتطلب عددا لا نهائيا من المنازل العشرية، بعض عمليات الضرب والأسس على الأعداد غير النسبية هي فعليا أعداد نسبية. إليك مثالا على ما سبق:

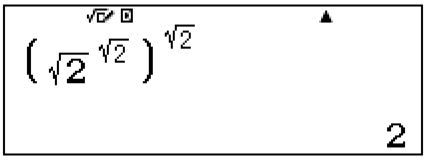






في الشاشتين الأولى والثانية في الأعلى، نرى تقريبان لعدد لانهائي من الخانات العشرية، على اعتبار أن كلا من $\sqrt{6}$ و $\sqrt{24}$ هما عددان غير نسبيان، ولكن حاصل ضربهما هو العدد $\sqrt{144} = 12$ يعتبر عددا صحيح وبالتالي هو عدد نسبي. تعرض الشاشتان الأولى والثانية النتائج بشكل تقريبي في حين النتيجة الموجودة في الشاشة الثالثة هي النتيجة الدقيقة.

وبشكل مشابه، يعرض المثال أدناه أعداد غير نسبية مرفوعة لأسس غير نسبية يمكن في بعض الأحيان أن ينتج عنها عدد صحيح وهو عدد نسبي:



تمارين

الغرض الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة الخاصة بك

1. مثل 0.45 على صورة كسر في أبسط صورة ممكنة.
2. أوجد $\frac{7}{9}+\frac{8}{11}$، عبر عن إجابتك في صورة كسر صحيح وكسر غير صحيح.
3. عبر عن النسبة المئوية لـ 43 من 80.
4. أوجد 57% من 16.
5. إذا دفعت فتاة دفعة مقدمة هي 15% من ثمن تلفاز، وإذا كانت الدفعة هي 69 دولارا، ما هو ثمن التلفاز؟
6. أوجد العوامل الأولية للعدد 678 345 12.
7. أوجد التكرار العشري لـ 4/7.
8. ما هو الكسر الممثل بالتكرار العشري $0.\overline{126}$؟ تحقق من إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة عبر تحويل الكسر إلى صيغة عشرية.
9. أحسب 7^6.
10. أحسب $4^5 + 12$.
11. حدد فيما إذا كان $2^{29} - 1$ عدد أولي أم لا.
12. أحسب $7^3 \times 7^3 \times 7^3$ وتحقق فيما إذا كان الجواب يساوي 343^3
13. تنبأ أيها القيمة الأكبر $(6^2)^3$ أم $(6^3)^2$؟ استخدم الآلة الحاسبة من أجل التحقق من تبنؤك.
14. a) ادخل واحسب التعابير الثلاثة التالية في الآلة الحاسبة $(5^2)^3$، $5^{(2^3)}$، 5^{2^3}.

    b) تنبأ فيما إذا ما كانت الآلة الحاسبة سوف تأول 2^{2^3} على أنه 4^3 أو 2^8. استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من تنبؤك.
15. أحسب $10^{½}$ وفسر ماذا يحدث في حال قمت بتربيعه.
16. أوجد الجذر الخامس لـ 1024. تحقق من إجابتك عبر إيجاد القوة الخامسة له.
17. أوجد الجذر التكعيبي لـ 23، صحح لأول أربع منازل عشرية.
18. الجذر التربيعي لعدد كلي ما أعطى النتيجة $6\sqrt{2}$. ما هو هذا العدد؟
19. أوجد الجذر التربيعي لـ 7 مقربا إلى أول 12 منزلة عشرية.
20. في فحص طبي شرعي، ورد بأن سماكة شعرة بشرية هي 13 ميكرو متر (الميكرو متر هو 10^{-6}متر). أدخل السماكة هذه في الآلة الحاسبة وعبر عنها بشكل عشري.
21. تنبأ بقيمة 7^{-2}. استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من تنبؤك.
22. أي من الأعداد التالية (في حال كانت) هي غير نسبية.

((a) $\sqrt{1521}$ (b) 13^{-3} (c) $\pi + 1$ (d) $\left(\sqrt[3]{17}\right)^3$ (e) 4.1425678423 (f) $\frac{357}{2143}$

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. إذا استثمرت مبلغ 500 دولار بمعدل فائدة سنوي 5%، وكان A كمية الأموال التي حصلت عليها بعد t سنة معطاة بالمعادلة $A = 500(1.05)^t$.

a) بعد كم سنة ستتضاعف قيمة استثمارك؟

b) في حال كان المبلغ الذي استثمرته هو 1000 دولار، متى سيتضاعف؟

c) اختر قيمة استثمار بنفسك، وانظر متى سوف يتضاعف.

d) كم يستغرق الاستثمار ليتضاعف في حال كان معدل الفائدة هو %7؟ %8...

2. العديد من الكسور ينتج عنها تكرار عشري، التي غالبا ما تظهر أنماط مثيرة للاهتمام. على سبيل المثال، أدرس الكسور ذات المقام 7. استخدم آلتك الحاسبة من أجل حساب 1/7 و 2/7 و 3/7 ومن ثم تنبأ بالمنازل العشرية من أجل 4/7 و 5/7 و 6/7. تحقق من تنبؤاتك باستخدام الآلة الحاسبة.

قم بمعاينة الكسور الأخرى والتى مقاماتها أعداد أولية، مثل 11 و 13 و 17 و 19. استخدام الآلة الحاسبة سيساعدك على الحصول على المعلومات اللازمة لمعرفة الأنماط لدى هذه الكسور واستخداماتها.

3. أي من هذه الأعداد هو الأكبر؟ أيها الأصغر؟ ضعها في الترتيب المناسب قبل استخدام آلتك الحاسبة من أجل التحقق من قرارك.

$A = 3.5 \times 10^{12}$ $B = 6.9 \times 10^{11}$ $C = 4.2 \times 10^{12}$ $D = 2.0 \times 10^{13}$

عندما طُلب من جمال إيجاد $C + D$ ، فكر جمال على أن D هو 20×10^{12}، وبالتالي كان مجموع $C + D$ هو 24.2×10^{12} حيث كتبته بالصيغة العلمية على أنه 2.42×10^{13}. هل يمكنك إيجاد طرق سريعة وفعالة مثل هذه من أجل حساب الأعداد بالصيغة العلمية؟ تحقق من طرقك يدويا ومن ثم عبر الآلة الحاسبة. قارن بين طرقك مع طرق باقي الطلاب.

استخدم الطرق التي رأيتها في الأعلى لحساب كل من $C \times D, A + C, B + C , D - A$.

4. ادعى "سمير" أن $x^{a+b} > x^a + b$ ، وذلك بغض النظر عن قيم كل من x و a و b. هل كلامه صحيح؟

استخدم آلتك الحاسبة من أجل معاينة أمثلة حول هذه العلاقة الرياضية وحاول إيجاد طرق لاستكشاف وتبرير الخلاصة التي وصلت إليها أمام باقي الطلاب.

5. هل العبارة التالية حول الأس السالب هي صحيحة أم خاطئة؟ $5^{-5} > 5^{-4}$

قارن أزواج أعداد أخرى مع بعضها البعض مثل 6^{-4} و 6^{-5}، بين 5^{-8} و 5^{-9}، بين $6^{-1/2}$ و $6^{-1/3}$، وبين 0.8^{-3} و0.8^{-4} .

تحقق من تنبؤاتك باستخدام الآلة الحاسبة، ولكن فقط بعض محاولة معرفة أي عدد منهما هو الأكبر. ابحث عن تعميمات وتفسيرات لها. تحقق من اكتشافاتك مع الطلاب الآخرين.

6. لقد رأيت كيف أن العدد المرفوع إلى أس نصف يعني الجذر التربيعي للعدد، وكيف أن العدد المرفوع إلى ثلث يعطي الجذر التكعيبي للعدد. تحقق من بعض الأمثلة تجاه ما سبق عبر الآلة الحاسبة.

ما هو معنى الأسس/القوى الكسرية؟ استخدم آلتك الحاسبة من أجل التحقق من:

$32^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^4} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = 16$ ومن أن $\left(7^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 7^2 = 49$.

ومن ثم استخدم الآلة الحاسبة من أجل تحري قوى كسرية أخرى بنفس الطريقة. (لاحظ أنه في الآلة الحاسبة فإن $x^{\blacksquare}$ SHIFT تعطي ($\sqrt[\blacksquare]{\square}$))

تحقق من اكتشافاتك مع الطلبة الآخرين.

ملاحظات من أجل المعلمين

تسلط هذه الوحدة الضوء على الطرق المختلفة التي يمكن فيها لآلة كاسيو *ClassWiz* الحاسبة تمثيل الأعداد والتي من ضمنها المنازل العشرية، النسب المئوية، الكسور، وذلك في الصيغة العلمية والصيغة العادية، كما جرى التطرق إلى كل من الأسس/القوى والجذور ومقلوب الأعداد. وتؤكد هذه الوحدة على فهم

عمليات التمثيل إضافة إلى كيفية معالجة الآلة الحاسبة لهم ومن ضمن ذلك التحليل إلى العوامل الأولية وتقريب الأعداد النسبية وغير النسبية. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف التمثيلات الخاصة بالأعداد.
وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطوير خبراتهم في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. 9/20 **.2** $\frac{149}{99}$ **.3** 43÷80 = 0.5375 = 53.75% **.4** 57% x 16 = 9.12

.5 $69 ÷ 15% = $460 **.6** 2 x 3^2 x 47 x 14593 **.7** $0.\overline{571428}$

.8 14/111 **.9** 117 649 **.10** 1036

.11 هو عدد مركب لأنه يتألف من عدد أولي هو 233. **.12** 40 353 607

.13 كلا العددين هما 656 46 = 6^6 **.14** a) 15625، 390625 و 390625. b)256 = 2^8

.15 تقريبا هو 3.16227766 والذي هو √10 وبالتالي فإن مربعه هو العدد 10.

.16 4 لأنه 1024 = 4^5 **.17** 2.8439 **.18** 72 (وهو مربع 6√2)

.19 2.645751311065 **.20** 13Kz6 تعطي 0.000013 **.21** 1/49

.22 فقط π + 1 (c) هو عدد غير نسبي.

أنشطة

1. في هذا النشاط، يستكشف الطلاب عملية فعّالة للتحليل نمو الفائدة المركبة. يجب تشجيعهم على تنظيم عملهم لرؤية أن وقت المضاعفة يعتمد فقط على معدل الفائدة وليس مبلغ الاستثمار. يجب عليهم رؤية العلاقة المعروفة باسم "القاعدة *72*" والتي تقول بأن مبلغ الاستثمار المركب يتضاعف في فترة تقريبا هي *72÷R* حيث *R* هي الفائدة السنوية. [الأجوبة أ)، ب) حوالي *14.2* سنة، د) حوالي *10.3* سنة، *9* سنوات،....].

2. إن الأنماط مع المنازل العشرية المتكررة هي أسهل توليدا على الآلة الحاسبة ومن الأسهل رؤيتها لدى بعض المقامات (مثل 3 و 7 و 11)، ولكنها أصعب في حال كان المقام 13 (على اعتبار وجود أكثر من نمط واحد) ومن الصعب جدا رؤيتها مع مقام 17 و 19 لأن الأنماط المتكرره يتجاوز قدرة الآلة الحاسبة على العرض. نشجع الطلاب على تسجيل النتائج بعناية من أجل رؤية الأنماط الداخلة.

3. يعرض الجزء الأول من هذا النشاط كيف أن الأعداد الممثلة بالصيغة العلمية هي نسبيا سهلة المقارنة في القياس. إضافة لما سبق، تصبح العمليات الحسابية أسهل في حال فهم الطلاب قوانين الفهرست والتي تساعد على فهم كيفية عمل هذه الأنماط.
[الأجوبة, B < A < C < D, $A + C = 7.7 \times 10^{12}$, $B + C = 4.89 \times 10^{12}$, $D – A = 1.65 \times 10^{13}$
$C \times D = 8.4 \times 10^{25}$ ويمكن القيام بكل هذه العمليات ذهنيا].

4. في هذا النشاط، يمكن التحقق من العرض الناتج عبر استخدام الآلة الحاسبة والتي تسمح بتوليد الأمثلة بشكل أكثر كفاءة. [الإجابة إن النتيجة غير صحيحة بشكل عام، مثلا عندما b < 0].

5. يتفاجأ معظم الطلاب من أن $5^{-5} < 5^{-4}$ إلا أن استكشاف هذا النوع من الأمثلة على الآلة الحاسبة سوف يساعد الطلاب على تقدير مثل هذه العلاقات. قد يكون من الحكمة تذكير الطلاب باستخدام SHIFT ☰ من أجل

الحصول على نتائج عشرية إذا أرادوا وذلك بالرغم من أن النتائج الكسرية تعطي معلومات جيدة أيضا في سياق الأسس الصحيحة. قد يتفاجأ الطلاب أكثر في حال علموا النتيجة هذه $0.8^{-4} > 0.8^{-3}$، ولكن يجب تشجيعهم على التفكير باحتمالية هذا (السبب يكمن في أن 1 > 0.8)

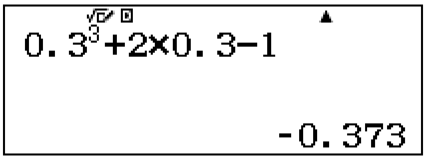
6. إن مفهوم رفع الأعداد إلى قوى/أسس كسرية هو صعب الفهم. يستخدم هذا النشاط الآلة الحاسبة لاستكشاف بعض الأمثلة الرقمية لرؤية كيف أن الأسس والجذور متصلة بالتأويل. يجب تشجيع الطلاب على معاينة أمثلة متعددة من اختيارهم. من أجل فهم التعميمات الموجدة، وخصوصا من أجل النتيجة الرئيسية $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$.

الوحدة الثالثة
الدوال (Functions)

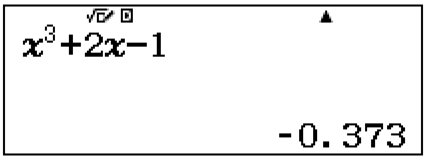
تعد الدوال جزءا مهما من الرياضيات حيث تستخدم على نطاق واسع لتمثيل العلاقات بمختلف أنواعها. وتعد الآلة الحاسبة ClassWiz مفيدة في إيجاد قيم الدوال بكفاءة بحيث يمكنك معاينة خصائصها عدديا. حيث تتضمن تلك الخصائص طبيعة الأنواع المختلفة من الدوال (والنظر في الرسومات البيانية المحتملة)، خصائص التناظر، الخطوط التقاربية والقيم العظمى والصغري المحلية. يمكن أن تساعدك الآلة الحاسبة على رسم وتصور الدوال وذلك على الرغم من أنها لا تملك القدرة على الرسم.

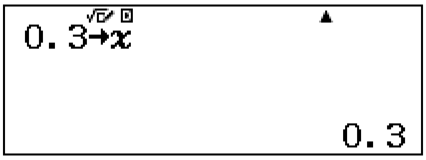
تقييم التعبيرات والدوال

هناك عدة طرق لإيجاد قيم الدوال باستخدام الآلة الحاسبة في وضعية العمليات الحسابية. عندما يجري إيجاد قيمة مقدار تعبير أو دالة ما عند نقطة ما، يمكن استخدام الآلة الحاسبة مباشرة. على سبيل المثال، بالنظر إلى الدالة $f(x) = x^3 + 2x - 1$. يمكن إيجاد قيمة الدالة عند $x = 0.3$ عن طريق استبدال x بـ 0.3 :



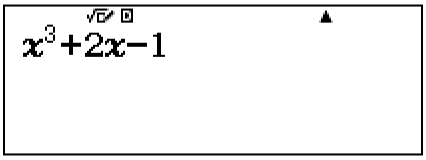
بدلا من ذلك، ومن أجل تجنب الحاجة إلى إدخال قيمة لـ x عدة مرات، يمكنك تخزين القيمة في الذاكرة ومن ثم إيجاد قيمة المقدار، وذلك باستخدام زر STO ثم زر x على النحو التالي:



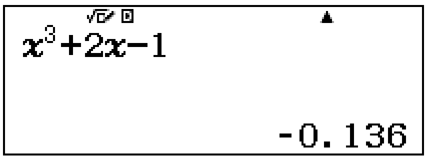


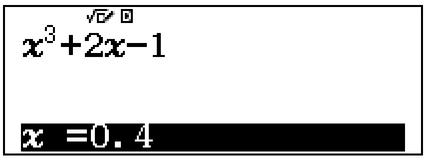
عندما يتعلق الأمر بإيجاد عدة قيم مختلفة لدالة ما، غالبا ما يكون من الأكثر كفاءة استخدام الخاصية CALC. على سبيل المثال، افترض أنك تريد إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما $x = 0.3, 0.4$,0.5 وذلك من أجل الحصول على أي هذه القيم لـ x أقرب إلى جذر الدالة، $f(x) = 0$.

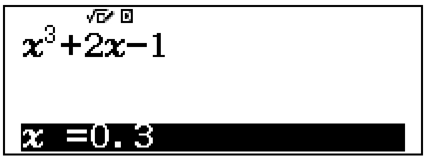
ادخل التعبير التي تريد اختباره في الآلة الحاسبة وذلك باستخدام x (لكن دون ضغط على =).



لإيجاد قيمة الدالة، اضغط على مفتاح CALC ، والذي سيؤدي إلى قيام الآلة الحاسبة بعرض القيمة الحالية لـ x (والتي كانت $x = 0.3$) في أسفل الشاشة. أدخل القيمة الجديدة لـ x ، ثم اضغط =. سيؤدي هذا إلى عرض القيمة الجديدة وذلك كما هو مبين في الشاشة الوسطى أدناه. أخيرا، انقر فوق = مرة أخرى لحساب قيمة المقدار. تظهر النتيجة في الشاشة الثالثة أدناه.

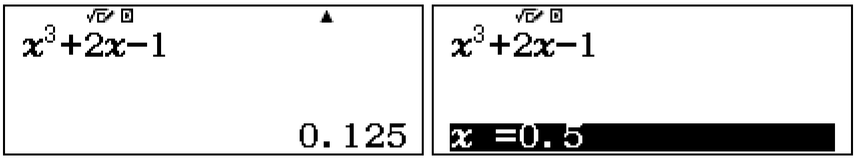






انقر على = من جديد لمواصلة هذه العملية مع قيم أخرى. ستستمر عملية CALC حتى تنقر على AC أو تقوم بتغيير نمط الآلة الحاسبة. يمكنك الحصول على العديد من القيم بكفاءة بهذه الطريقة.

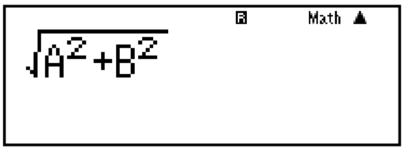
تعرض الشاشات أدناه $f(0.5) = 0.125$. تقترح القيم الثلاث هذه، إلى أقرب خانة عشرية، أن قيمة x الأقرب إلى جذر المعادلة يجب أن يكون $x = 0.5$



تعتبر خاصية CALC مفيدة أيضا في إيجاد قيم المقادير المكون من أكثر من متغير واحد وذلك باستخدام مفاتيح الذاكرة من A إلى F و x و y. على سبيل المثال، إذا كان A و B هما أطوال الضلعين القصيرين لمثلث قائم الزاوية، فإن طول الوتر معطى بالصيغة التالية:

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

ادخل هذا التعبير إلى الآلة الحاسبة وانقر على CALC.

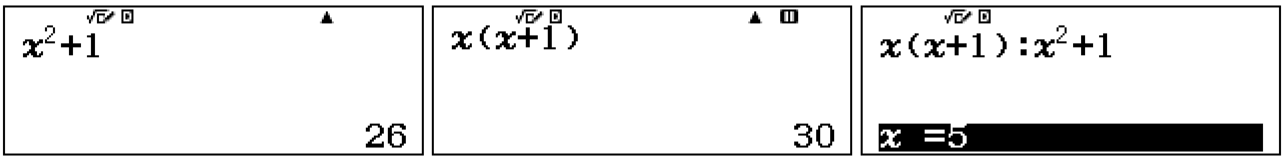


كما هو مبين أدناه، ستطلب الآلة الحاسبة إدخال قيمة لكل من A و B ومن ثم نقوم بإيجاد قيمة المقدار. انقر على = بعد إدخال كل قيمة.

إذن، في مثلث قائم الزاوية إذا كان أطوال ضلعيه القصيرين 5 و12 يكون طول الوتر 13. انقر على = أو CALC مرة أخرى لإدخال قيم مختلفة لـ A و B.

مقارنة التعابير

يمكن أيضا استخدام خاصية CALC من أجل مقارنة مقادير مختلفة. للقيام بذلك، ادخل المقادير ، يُفصل بينها بنقطتين (:) (والتي يمكن الوصول لها عبر الضغط على زري ALPHA ∫▭، ثم اضغط CALC وادخل قيم المتغيرات. وسيجري إيجاد كل المقادير عن طريق النقر على مفتاح =. انظر للمثال التالي في الأسفل والذي فيه يجري مقارنة المقادير $x(x + 1)$ و $x^2 + 1$.

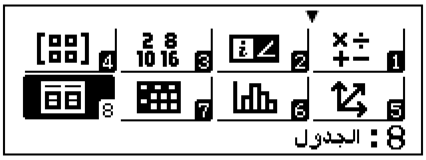


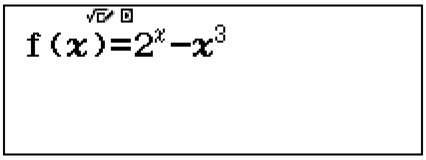
بعد إدخال قيمة x ، انقر على = للحصول على قيم كل المقادير بالترتيب. بعد المقدار الثاني، انقر = من جديد لإدخال قيم جديدة لـ x. تحقق بنفسك عبر استخدام هذه الطريقة من أن $x(x + 1)$ تملك قيمة مختلفة عن $x^2 + 1$ ما عدا الحالة التي تكون فيها قيمة $x = 1$.

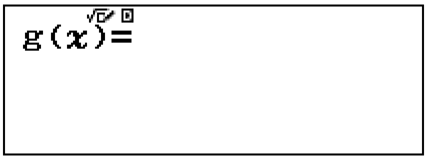
استخدام جداول القيم

عندما يكون هناك حاجة لإيجاد قيم دالة عند عدة نقاط، يعد خيار إنشاء جدول بقيم متعددة هو الخيار الأفضل. استخدم وضعية الجدول للقيام بذلك، انقر على MENU 9 وأدخل الدالة، كالدالة في المجهول x.

على سبيل المثال، لتحديد فيما إذا كان الدالة $f(x) = 2^x - x^3$ تساوي الصفر عندما تكون قيم x بين 0 و 2، سيكون من المفيد وضع عدة قيم لـ x ومن ثم رؤية أيها الأقرب إلى الصفر. للقيام بذلك، أكتب ما يكافئ الدالة $f(x) = 2^x - x^3$ وذلك كما هو مبين أدناه (تستخدم الآلة الحاسبة حرف f من أجل الدوال):



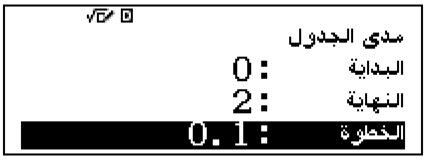


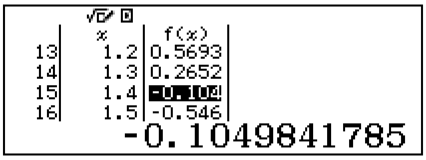


تذكر استخدام مفتاح ▶ من أجل الخروج من الأس بعد إدخال 2^x.

بعد أن يتم إدخال الدالة إلى الآلة الحاسبة مع =، سيظهر رمز الدالة الثانية $g(x)$ أعلاه. ولأننا هذه المرة لا نملك سوى دالة واحدة فقط، هنا يمكن تجاهل هذا ببساطة عبر النقر على = من جديد. [ومن الممكن أيضا استخدام أمر Table (الجدول) في الإعدادات لتقييد قيام آلة ClassWiz الحاسبة بجدولة دالة واحدة بدلا من دالتين إذا كنت ترغب في ذلك].

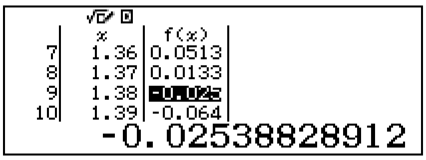
بعد ذلك، تحتاج إلى تحديد قيم البداية (Start)، و النهاية (End) و الخطوة (STEP) للجدول. تعتبر هذه القيم الأولى والأخيرة لـ x في الجدول والزيادة بينهم. من المهم هنا معرفة أن أقصى عدد لقيم x ينبغي الا يتجاوز 30 عددا، بالتالي يجب أخذ هذا في الحسبان. انقر على = بعد إدخال كل قيمة من القيم الثلاث.





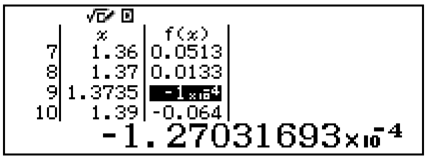
بعد إدخال الخطوة (Step) [وهو الفرق العددي بين كل رقم والذي يليه: قد يكون عدد صحيح أو عشري]، ستظهر قيم الجدول. يمكنك التنقل عبر القيم باستخدام زري ▲ و ▼. من الأفكار الجيدة وضع المؤشر ضمن عمود $f(x)$ على اليمين حيث ستقوم الآلة الحاسبة بعد ذلك بعرض القيم المظللة بمزيد من الدقة.

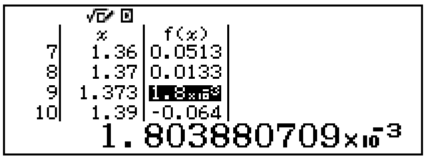
في هذه الحالة، يظهر ما يبدو على أن جذر المعادلة بين $x = 1.3$ و $x = 1.4$، مع تغير إشارة الدالة بين هاتين النقطتين. لزيادة دقة النتيجة، قم بإنشاء جدول جديد مع البدء بقيمة $x = 1.3$ والانتهاء بقيمة $x = 1.4$، ولكن مع خطوة أقل مقدارها 0.01. من أجل القيام بذلك، انقر AC (والتي لن تمسح أي شيء ما لم تضغط عليها مرتين)، ثم انقر على = من أجل إدخال القيم الجديدة كما ذكرنا من قبل. بعض النتائج معروضة أدناه.

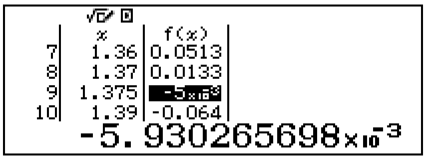


يمكنك تكرار هذا النوع من العمليات لزيادة الدقة بمقدار خانة عشرية واحدة في كل مرة. في هذه الحالة، يبدو وأن الدالة f(x) لديها جذور بين قيم $x = 1.37$ و $x = 1.38$.

تتوفر عملية بديلة جيدة أيضا. ضع المؤشر في عمود x واستبدل قيم x المظللة بإدخال قيم مختلفة. بمجرد نقرك على =، سيجري إيجاد الدالة عند النقطة الجديدة. قم بالنظر إلى الشاشات أدناه لرؤية عملية "التجربة والخطأ" مستبدلا قيمة x السابقة وهي 1.38 بقيمة جديدة في كل مرة وهي 1.375 و1.373 ومن ثم 1.3735.



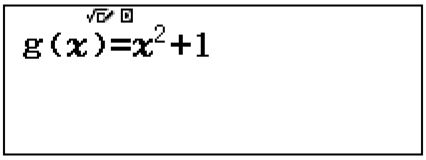


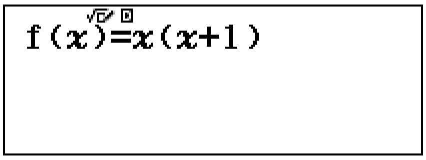


لا يتأثر باقي الجدول بهذه التخمينات المتعاقبة والتي نحاول فيها الحصول على أقرب جذر لـ $f(x)$.

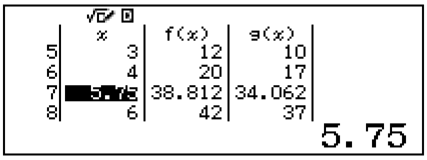
يوضح هذا المثال كيف أن جدول القيم مفيد من أجل العثور على النقاط الهامة المرتبطة بدالة (مثل الجذور، والتقاطعات، ونقاط التحول وما إلى ذلك). في الأقسام التالية، سترى أن الجداول ستسمح لك أيضا بفهم الخصائص الأخرى للدوال.

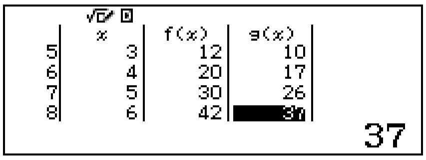
في القسم السابق، جرى مقارنة بين مقدارين $x(x + 1)$ و$x^2 + 1$ عبر إيجاد قيم كل منهما باستخدام قيم متعددة من x. من العمليات الأكثر كفاءة هي تكوين جدولين للقيم، الأمر الذي يسمح لك برؤية العديد من القيم بسرعة. تظهر الشاشتين التاليتين كيفية تنفيذ هذا الأمر في وضعية الجدول.

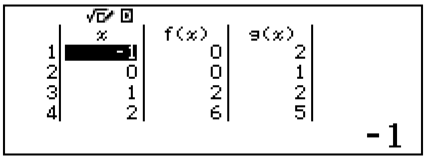




اختر قيم البداية، النهاية و الخطوة (start, end and step) للجداول. تبين النتائج أدناه كيف أنه في حالة $x = 1$ فإن كلا المقدرين يملكان نفس القيمة. في الشاشة الثانية و الثالثة، فإنه جرى اختبار قيم أخرى لـ x.







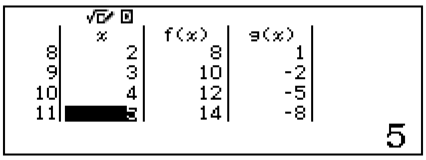
لاحظ أن x هو المتغير الوحيد المسموح به، وأن f و g هي أسماء الدوال الوحيدة التي يمكن استخدامها لإدخال دالة في الآلة الحاسبة ClassWiz من أجل تكوين جدول. بالتالي يجب إدخال الدوال في متغير مختلف وفقا لذلك . على سبيل المثال، يتم إدخال $h(t) = 5t + 7$ كدالة مكافئة $f(x) = 2x + 7$. ستكون كل القيم الرقمية هي نفسها: فقط أسماء المتغيرات والدوال متغيرة.

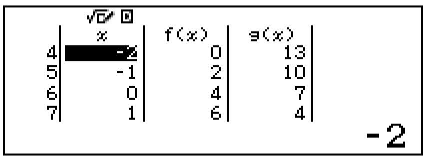
الدوال الخطية والتربيعية

يمكن لجدول القيم أن يكشف عن طبيعة الدوال بشكل جيد جدا. قم بالنظر في الدوال الخطية والتي فيها متغير واحد *غير* مرفوع إلى أي أس/قوى. إليك مثالين هنا:

$f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = 7 - 3x$.

تعرض جداول القيم الخاصة بهذه الدوال كيف أنها تتزايد أو تتناقص بقيم ثابتة مع تغير قيم المتغير بشكل مطرد. تعرض الشاشتان أدناه الدالة f على اليسار والدالة g على اليمين.

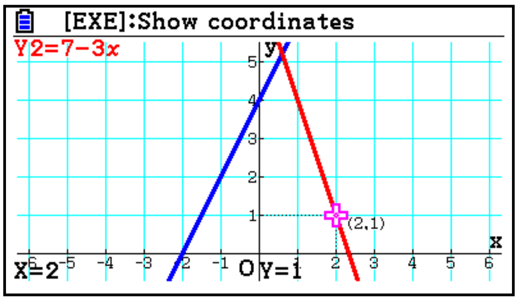


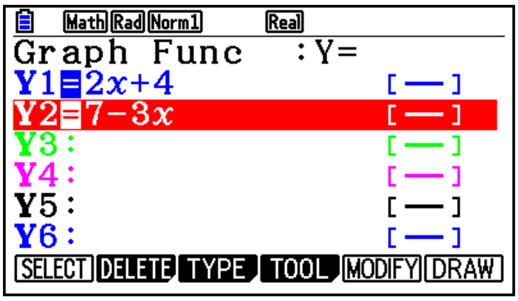


تتزايد قيم f(x) بمقدار 2 عندما تزيد قيمة x بمقدار 1، بينما تتناقص قيم g(x) بمقدار 3 عندما تزيد قيمة x بمقدار 1. يؤدي التنقل بين الجدول صعودا وهبوطا إلى جعل هذا أكثر وضوحا من لقطات الشاشة الموجودة هنا والتي بدورها تظهر فقط أربعة أزواج من القيم لكل منهما.

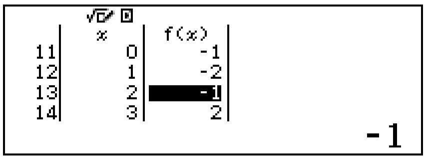
يمكنك استخدام جداول مثل هذه للحصول على قيم كافية لرسم بياني على ورقة.

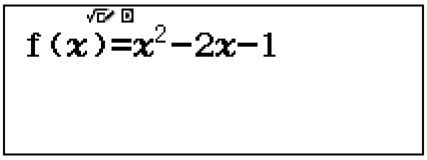
التفكير في الدوال الخطية بهذه الطريقة، مع مساعدة من الجداول، يسمح بتخيل رسومات الدوال: تتزايد f(x) بميل مقداره 2، أما g(x) فتتناقص أكثر حدة بميل مقداره 3-. يمكن أن نرى ذلك بشكل أوضح في الرسم البياني، مرسوم بإستخدام الآلة الحاسبة البيانية CASIO fx-CG20، حيث يمكن أن نرى كيف أن شكل الدالة يمثل خطا مستقيما، وهذا هو السبب في تسميتها بالدوال الخطية.





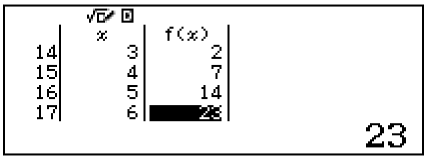
تشمل الدوال *التربيعية* (أو الدوال من الدرجة الثانية) متغير مرفوعا للقوى/الأس الثاني، ولها طابع مختلف عن الدوال الخطية: لا تغيير قيمة الدالة بشكل ثابت عندما تتغير قيمة المتغير بشكل ثابت. على سبيل المثال، انظر للدالة التربيعية التالية $f(x) = x^2 - 2x - 1$، والتي جرى وضعها في جدول أدناه. مع تزايد قيمة x بمقدار 1 (أي من 1 إلى 2)، تزيد قيمة الدالة بمقدار 1 (أي من 2- إلى 1-). ولكن مع تزايد قيمة x من 2 إلى 3، تزيد قيمة الدالة بمقدار 3 (من 1- إلى 2). وعلى عكس الدوال الخطية، فإن الزيادة في الدوال التربيعية ليست ثابتة.

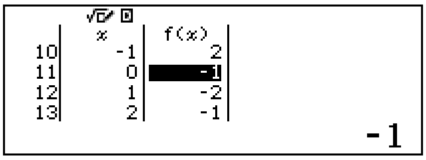


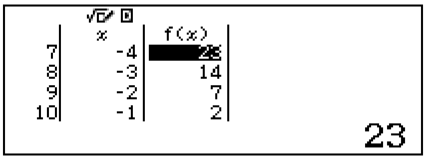


يكشف التنقل في الجدول أن قيم الدالة تزيد إلى يمين $x = 1$ وإلى يسار $x = 1$ بنفس الطريقة: في الحقيقة قيم الدالة متناظرة في كلا جانبي $x = 1$، التي تملك أقل قيمة هي $f(x) = -2$. قم بدراسة أجزاء الجدول في الأسفل من أجل التحقق بذلك بنفسك.

الجداول مثل هذه تساعدك على رسم مخطط بياني للدالة على الورق بكفاءة.



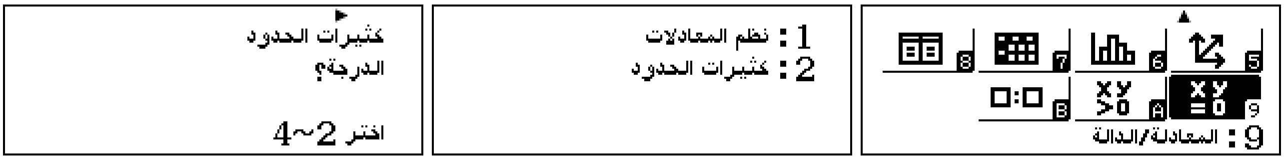




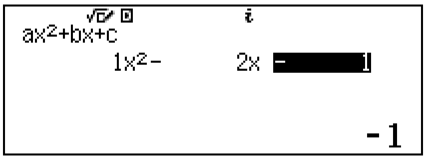
بدءا من القيمة الصغرى للدالة $f(1) = -2$ ، تزداد قيم الدالة f(x) بمقدار 1، 3، 5، 7، إلخ عندما تتغير فيها قيمة x بمقدار 1 في الاتجاهين. (لاحظ أن هذه الزيادات خطية: تزيد بشكل مطرد بنسبة 2 في كل مرة وهو من خصائص دوال الدرجة الثانية والتي معامل x^2 هو 1).

على الرغم من أنه من المفيد استخدام الرسم البياني لفهم طبيعة هذه الدالة، يمكن لجدول القيم مساعدتك على تصور شكل وخصائص الرسم البياني لها.

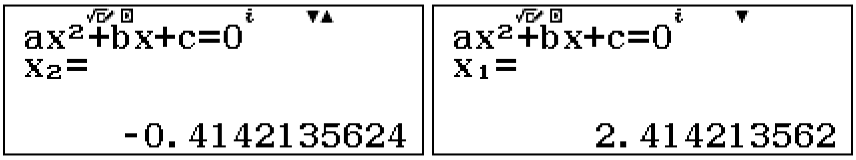
في حين أن جدول القيم مفيد، ويسمح لك برسم مخطط بياني للدالة، يمكن لآلة ClassWiz الحاسبة توفير المزيد من المعلومات لفهم الرسم البياني للدالة التربيعية. قم بالانتقال إلى نمط (المعادلة/الدالة) Equation/Function باستخدام الأزرار MENU 9 ، واختر دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2، كما هو مبين أدناه.



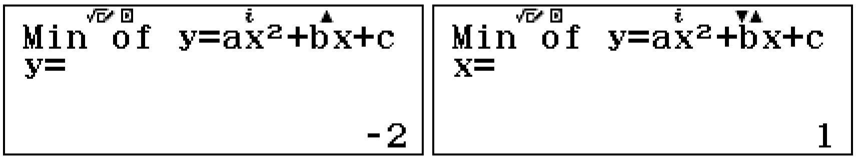
ادخل المعاملات الثلاثة من الدرجة الثانية، 1 و2- و1- مع النقر على ⊜ في كل مرة.



ثم انقر فوق ⊜ للحصول على كلا جذري الدالة X_1 و X_2 وذلك كما هو مبين أدناه.

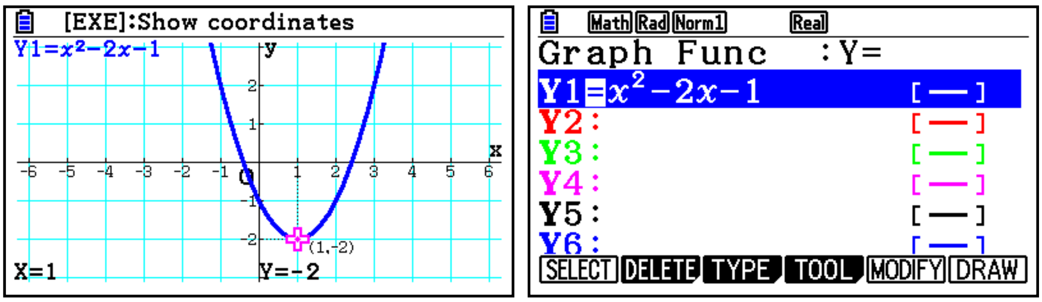


أخيرا، يؤدي النقر على ⊜ مرتين إلى تقديم إحداثيات نقطة التحول، القيمة الصغرى للدالة، (1,-2) للقطع المكافئ:



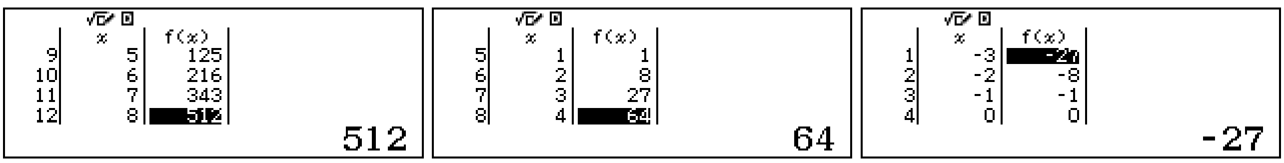
ستسمح لك هذه القيم من الجذور ونقاط التحول من تكوين رسم بياني جيد للدالة التربيعية على الورق وذلك جنبا إلى جنب مع القيم الموجودة في الجدول.

وكما ترون من شاشات الآلة البيانية CASIO fx-CG20، تتواجد كل الخصائص المذكورة في الأعلى بشكل واضح في الرسم البياني، مما يدل على أن القطع المكافئ لديه خط متناظر من خلال نقطة التحول هي x =1:

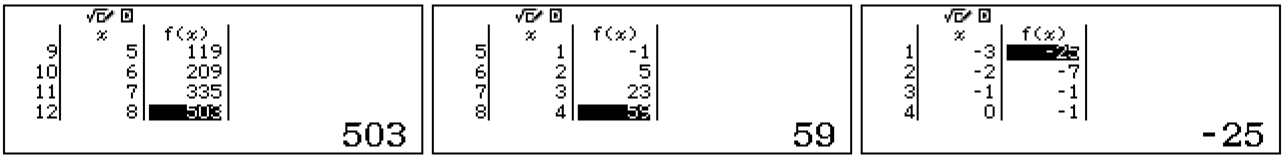


الدوال التكعيبية

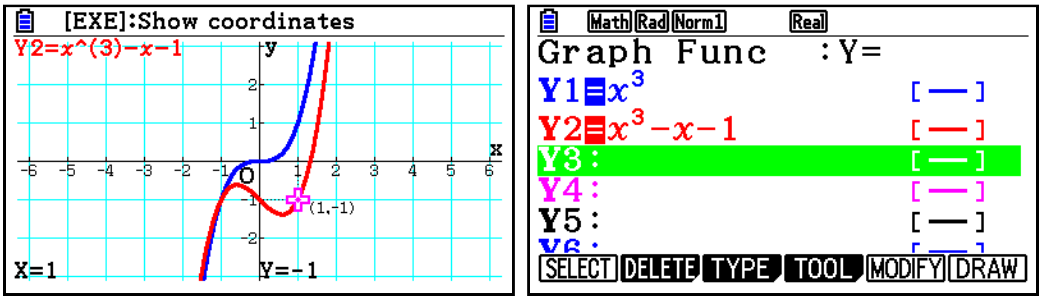
تملك الدوال التكعيبية حدا يكون المتغير فيه مرفوع إلى القوى الثالثة. وأيضا يكون جدول القيم مفيدا في فهم طبيعة دالة تكعيبية معينة كما هو الحال في الدوال الخطية والمربعة. على سبيل المثال، تقترح الجدول أدناه أن الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ تتزايد، ولكن ليس بطريقة خطية، كما أنها تملك قيما سالبة عندما تكون $x < 0$ وقيما موجبة عندما تكون $x > 0$.



بينما تعتبر هذه الدالة التكعيبية (الأساسية) متناظرة حول نقطة الأصل (x=0)، فإن الدوال التكعيبية الأخرى ليست كذاك. أيضا، سيوفر جدول القيم بعض الرؤى الخاصة بشكل الدالة. حيث تعرض الجداول الموجودة في الأسفل دالة تكعيبية مختلفة $f(x) = x^3 - x - 1$ وهي ليست متناظرة حول نقطة الأصل.

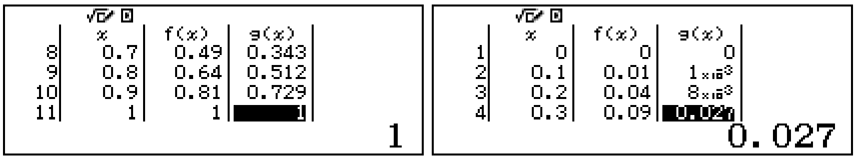


تعتبر هاتين المجموعتين من الجداول مفيدتان من أجل تصور أشكال اثنين من الدوال التكعيبية (والتي نراها ممثلة في الرسوم البيانية أدناه من خلال رسمها بالآلة البيانية CASIO FX-CG20). توضح هذه الرسوم البيانية كيف أن هناك أشكالا مختلفة للدوال التكعيبية (وذلك على عكس الدوال الخطية والتي ليس لها سوى شكل خطي، والدوال التربيعية والتي ليس لها سوى شكل قطع مكافئ).

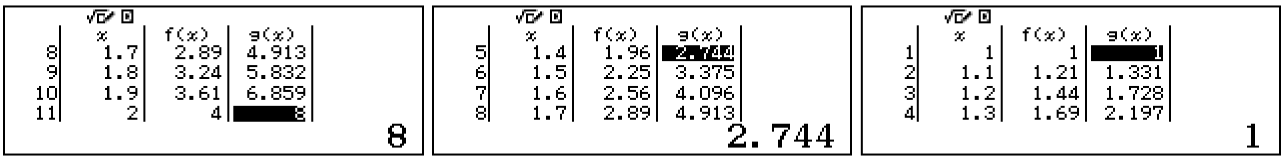


يمكن أن تساعدك الجداول أيضا على مقارنة الدوال التربيعية مع تلك التكعيبية. على سبيل المثال، انظر الدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ سترى لدى إلقائك نظرة أقرب على جدول القيم وضمن نفس المجال كيف أن تزايد الدالة التكعيبية يكون أبطأ من تزايد الدالة التربيعية في المجال 0< x<0.5. وأكثر حدة في المجال 1<x<2.

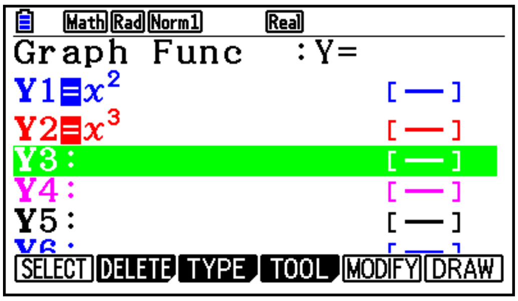
لمعرفة هذه الاختلافات، قم بالنظر للجدول الخاص بالقيم 0<x<1:

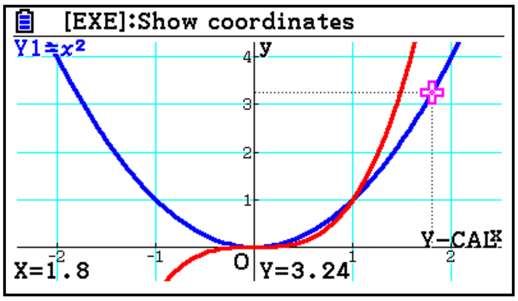


لاحظ السلوكيات المختلفة في الجداول أدناه من أجل 1<x<2 حيث نرى أن الدالة التكعيبية هنا تتزايد بشكل أسرع من تلك المربعة.



صحيح أن كلا النوعين من الدوال هما منحنيات بدلا من خطوط، إلا أن هذه المنحنيات تختلف عن بعضها البعض حيث تعكس الرسوم البيانية أدناه هذه الخصائص أيضا.





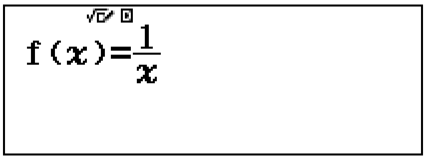
من جديد، تسمح لك دراسة جداول قيم هذه الدوال بفهم الطرق التي تتغير فيها هذه الدوال تبعا لتغير قيم المتغيرات المدخلة إضافة إلى تغير الرسوم البيانية لها.

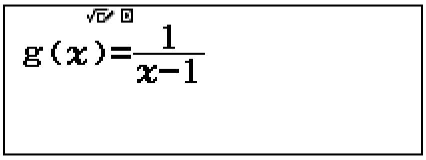
مقلوب الدوال

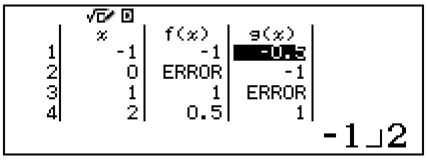
يمكن دراسة مقلوب الدوال (أي تلك التي تتضمن القسمة على متغير) بنفس الطريقة، حيث سننظر إلى مثالين عن مقلوب الدوال:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{x-1}$$

يتضح على الفور أن أحد خصائصها عند إنشاء جدول فيه قيم تجعل المقام يساوي الصفر. (في هذه الحالة جدول الدالة f(x) يحتوي x=0 وجدول g(x) يحتوي x=1 بحيث (x-1=0):



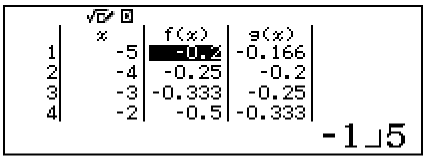


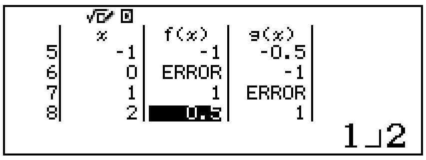


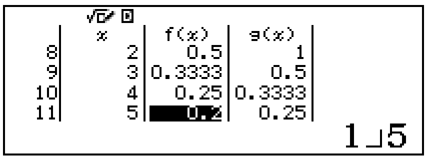
يكمن السبب في هذا هو أن القسمة على صفر هي غير معرفة، بالتالي لن يكون هناك قيمة للدالة عند f(0) و g(1)، بالتالي ستعطي الآلة الحاسبة خطأ (ERROR) لهاتين الحالتين.

ما يتصل بهذا النوع من الانقطاع (عدم الإتصال) هو فرق آخر فيما يتعلق بطبيعة مقلوب الدوال: وهو أن قيمها لا تتغير بشكل سلس ومستمر مثل دوال أخرى مرت في هذا الوحدة حيث نراها "تقفز" بشكل حاد، بالتالي تملك الرسوم البيانية لهذه الدالة جزآن متمايزان تماما.

انظر من جديد لمقلوب الدالة المبينة أعلاه, التحقق من بعض القيم الموجودة في الجدول يبين لك هذه الظاهرة. تحقق بشكل جيد من الشاشات الموجودة أدناه:

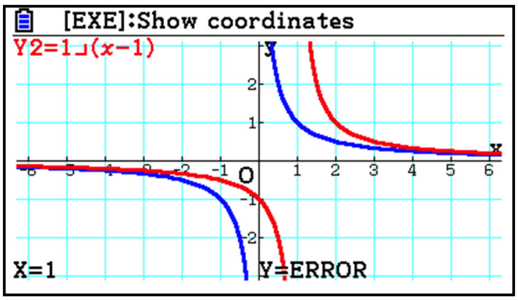


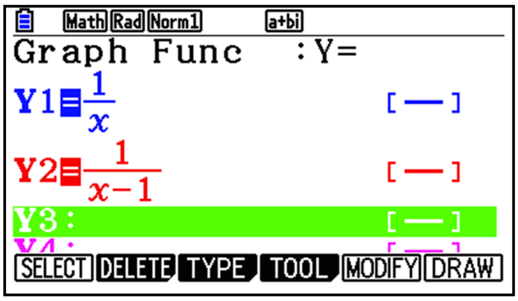




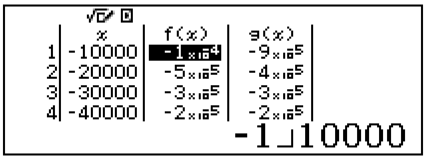
تكشف دراسة قيم الجدول أن f(x) تملك قيما موجبة من أجل x>0 وقيما سالبة من أجل x<0، في حين تملك g(x) قيما موجبة من أجل x>1 وقيما سالبة من أجل x<1. كما أنه من الواضح أيضا أن قيم f(x) في جانبي الصفر متضادة لبعضها البعض الأمر الذي يقترح أن الدالة متناظرة حول نقطة الأصل. أما قيم g(x) فتعرض كيف أنها متناظرة حول x=1. ستسمح لك جداول مثل هذه بإنشاء الرسوم البيانية لتلك الدوال على الورق.

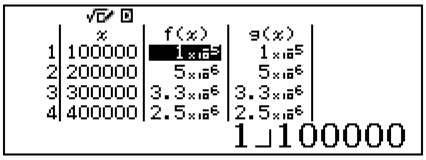
تعرض الرسوم البيانية لهاتين الدالتين (والتي جرى إنشائها بالآلة البيانية CASIO fx-CG20) هذه الأنواع من الخصائص أيضا:

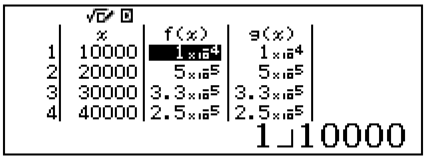




من الخصائص الأخرى لمقلوب الدوال هي أن القيم تبدو وكأنها تقترب أكثر وأكثر من y = 0 (محور x) من أجل كل من القيم الموجبة والسالبة الكبرى لـ x. ومع ذلك، فإن هذه القيم لا تصل أبدا إلى الصفر: تلك التي فيها x>0 هي دائما موجبة، في حين تلك التي فيها x<0 هي دائما سالبة. يمكنك رؤية ذلك من خلال عمل جدول من أجل قيم كبيرة للغاية. توضح الأمثلة أدناه هذا:



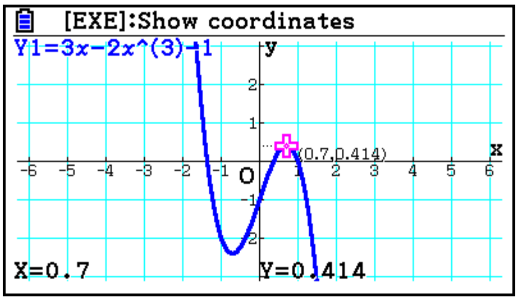




من أجل هذه الدوال المعينة، هناك خط تقارب أفقي y = 0 حيث القيم هنا تقترب أكثر وأكثر من 0، ولكن لا تصله أبدا. تعد الخطوط التقاربية مهمة جدا في الرياضيات المتقدمة، وسوف تراها مع مقلوب الدوال.

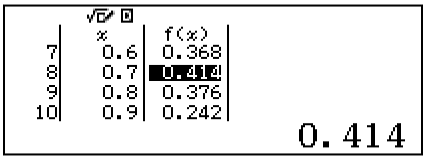
القيم العظمى والصغرى للدالة

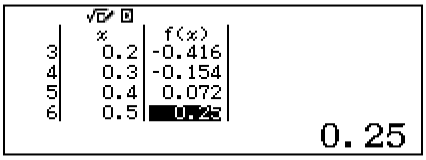
ربما لاحظت أن بعض الدوال تبدو وكأنه لديها قيم عظمى أو قيم صغرى في بعض المراحل. تملك الدالة التربيعية إما قيمة عظمى أو قيمة صغرى، بينما تملك بعض الدوال التكعيبية قيمتان، قيمة عظمى و قيمة صغرى وهي ممثلة عبر "حلقات" في الرسم البياني للدالة. على سبيل المثال، يبدو من الرسم البياني للدالة $f(x) = 3x - 2x^3 - 1$ (المرسومة باستخدام الآلة البيانية CASIO fx-CG20) أن الدالة قد بلغت القيمة العظمى بين x=0 وx=1، والصغرى بين x=-1 و x=0.



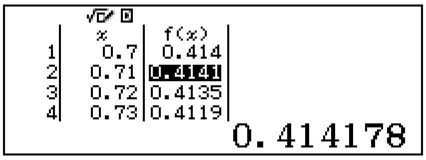
لاحظ أن هذه القيم هي فقط قيم "صغرى" و"عظمى" في سياق مقيد أو نسبي: على سبيل المثال، تعد قيمة الدالة عندما x<-2 أكبر بكثير من أي قيمة للدالة بين x=0 وx=1. في هذه الحالة هناك "قيمة عظمى محلية" بين x=0 وx=1 .

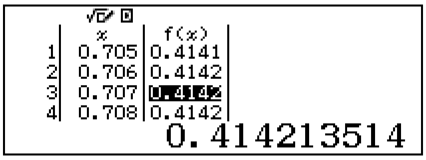
يعد جدول القيم وسيلة مريحة للغاية لدراسة القيم العظمى أو الصغرى ضمن فترة صغيرة. في حالة $f(x) = 3x - 2x^3 - 1$، فإن عملية جدولة القيم بين x=0 وx=1 ستكون مفيدة:

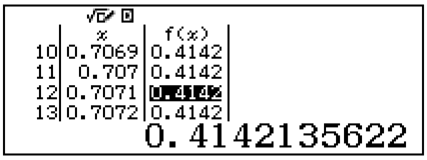




يبدو من الجدول أن هناك قيمة عظمى للدالة هي بين x=0.6 و x=0.8. ومن أجل معاينة القيمة العظمى عن كثب، اختر فترات أصغر و أصغر، مع تدرج أصغر في المقابل. انتقل عبر الجدول للبحث عن القيمة العظمى. تعرض الشاشات أدناه استخدام هذه العملية بشكل متكرر مع خطوة مقدارها 0.01 و 0.001 و 0.0001 على التوالي:

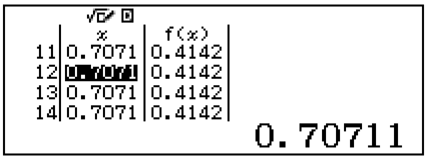


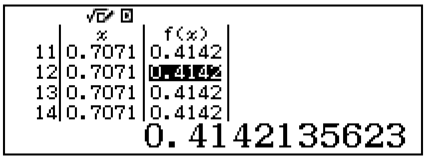




لاحظ أن كل القيم المجدولة في الشاشة النهائية أعلاه يبدو وكأنها هي نفسها تقريبا (0.4142)، حيث يكمن السبب في أن الجدول لا يعرض سوى أربعة منازل عشرية. إلا أنه ستتوفر أفضل دقة متاحة عن طريق تمرير المؤشر في عمود f(x).

تعرض الشاشتين القادمتين تقريب آخر إضافي وذلك باستخدام خطوة مقدارها 0.00001. لاحظ كيف أن كلا العمودين يبدوان من دون تغيير وذلك بسبب محدودية العرض للجدول. ومع ذلك، تكشف عملية تمرير المؤشر في كلا العمودين عن قيم أكثر دقة.





لهذه الدالة، يبدو أن هناك قيمة عظمى (محلية) هي f(x) ≈0.41421 وذلك بالقرب من قيمة0.7071≈ x. إذا استمريت بشكل متزايد في جدولة الدالة بتدرج أصغر، ستتمكن من الحصول على نتائج أكثر دقة.

إلا أن النتيجة المضبوطة هي فقط متوفرة عبر استخدام حساب التفاضل والتكامل حيث يمكن استخدام ClassWiz فقط من أجل العثور على تقريب عددي جيد. في هذه الحالة، فإن القيمة المضبوطة (المحددة بوسائل أخرى) هي بالضبط 1- 2√، عندما 2/2√= x لذلك فإن الإجراء العددي يعطي تقريب جيد بعد عدد قليل من الخطوات.

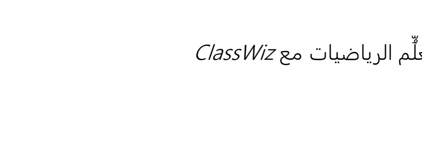
تسمح لك أنواعا مماثلة من عمليات التقريب المتكرر في الجدول من إيجاد القيمة الصغرى المحلية للدالة. تحقق بنفسك من أن الدالة f(x) المدروسة هنا تملك قيمة صغرى تساوي تقريبا 2.4142- بالقرب من x ≈ -0.4142

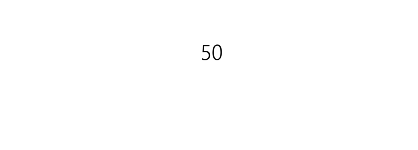
تقاطع رسمين بيانيين

كما نوهنا آنفا، تسمح لك الآلة الحاسبة بعملية تصور الأفكار الرياضية (مثل الرسوم البيانية للدوال) وذلك بالرغم من أنها لا تملك القدرة على الرسم البياني. مثال آخر جيد عن هذا يشمل تقاطع الرسوم البيانية للدوال. انظر للدالتين التاليتين:

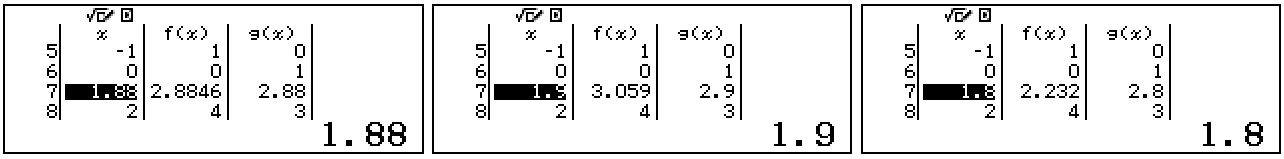
$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$g(x) = 1 + x$$

تتقاطع الرسوم البيانية للدوال عندما يكون لديهما نقطة مشتركة: نفس قيمة x و قيمة y. جدولة بعض القيم، في الفترة $-1 < x < 2$، يوحي أن قيم الدوال قريبة لبعضها البعض بالقرب من نقطة الأصل.

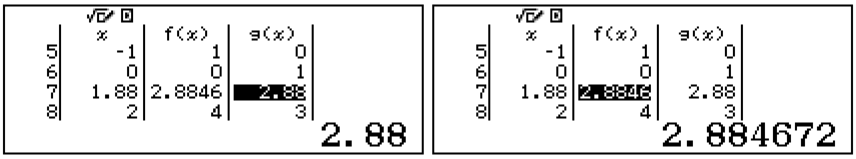




هناك نقطة تقاطع بين x = 1و x = 2. ومن أجل إيجاد تقريب لهذه النقطة، حرك المؤشر إلى العمود x (عند $x = 1$) وأدخل تخمين جيد لقيمة x بحيث يكون عندها قيمتا f(x) و g(x) متساويتان، ومن ثم انقر على ⊜ . تعرض الشاشة الأولى التخمين x = 1.8 وهو صغير نسبيا، مع f(x) < g(x).



وتشير الشاشة الثانية إلى x = 1.9 وهو كبير قليلا، مع f(x) > g(x). أما بالنسبة للشاشة الثالثة، وبعد بعض التخمينات، نجد إن x = 1.88 هي قريبة جدا وذلك بالرغم من أنها صغيرة نوعا ما. لاحظ في الأسفل كيف أن f(1.88) و g(1.88) هما قريبان للغاية وهو الأمر الذي يقترح بأن الرسوم البيانية لهما تتقاطع قرب x = 1.88.



لاحظ أن القيمتان ليستا نفس الشيء (وذلك لأن الحل هو فقط تقريبي):

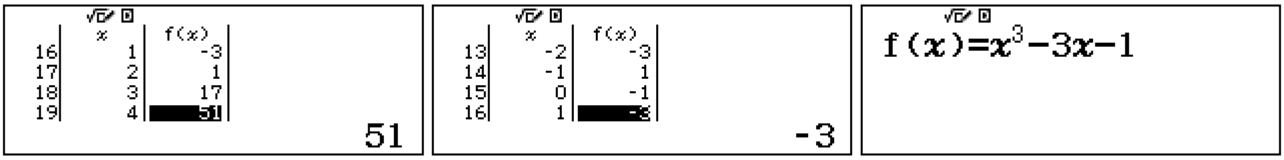
$$f(1.88) = 1.88^3 - 2 \times 1.88 = 2.884672$$
$$g(1.88) = 1 + 1.88 = 2.88$$

بالتالي، ستكون النقطة (1.88،2.88) تقريب جيد لنقطة تقاطع الرسمان البيانيان.

طريقة أخرى لاستكشاف نقاط التقاطع هو إيجاد أصفار دالة الفرق بين الدالتين بدلا من مقارنة الدالتين. بالتالي نجدول فقط دالة الفرق d(x):

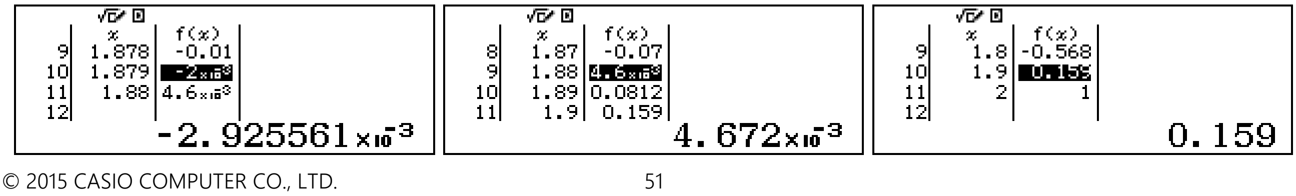
$$d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 1\ .$$

تتقاطع الرسوم البيانية في النقاط التي تكون دالة الفرق عندها تساوي صفر. ومع محدودية المعلومات عن مكان تقاطع الرسوم البيانية، يكون الخيار الجيد هو البدء بجدولة القيم من x = -14 إلى x = 15 مع تدرج (الخطوة) مقداره 1. يؤدي التنقل عبر هذا الجدول لإيجاد النقاط التي تكون عندها f(x) قريبة من الصفر إلى الكشف عن ثلاث فترات ممكنة كما هو مبين أدناه:



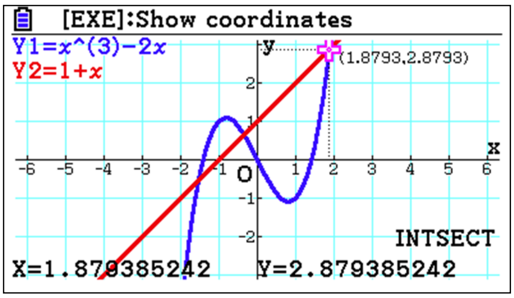
عندما تقوم الدالة المكعبة بتغير الإشارة (من سالب إلى موجب أو العكس)، سيمر منحناها عبر الصفر. بالتالي سيظهر ذلك وجود أصفار في كل من -1 > x > -2، و 0 > x > -1و 2 > x > 1. سنقوم بمعاينة فقط آخر فترة من هذه الفترات الثلاث.

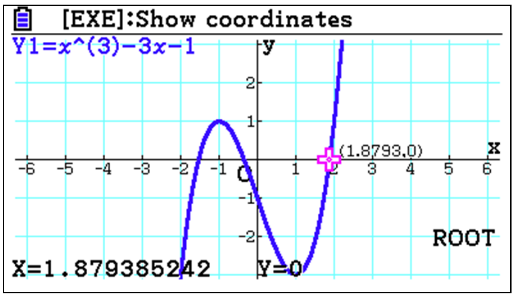
تسمح لك عملية تقريب قيم الجدول بشكل متكرر الحصول على تقريبات تتزايد دقتها إلى الحل. قم بدراسة هذه المقتطفات من الجداول الثلاثة المتتالية أدناه بعناية، والتي تستخدم عشر قيم في كل فترة من الفترات المتتالية 2 > x > 1 و 1.9 > x > 1.8 و 1.88 > x > 1.87 .



لاحظ أن مقدار التدرج (الخطوة) للجداول يغدو أصغر في كل مرة، 0.1 و 0.01 و 0.001 على التوالي، بالتالي مع تنفيذ هذا، ستسمح لك الآلة الحاسبة الحصول على منازل عشرية متزايدة من الدقة وذلك مع كل جدول لاحق. يمكنك متابعة هذه العملية لفترة أطول، ولكن سنختار التوقف هنا الأمر الذي يقترح أن $x \approx 1.88$ هو تقريب جيد، مقرب إلى أقرب خانتين عشريتين ومتسق مع الطريقة الأولى المستخدمة.

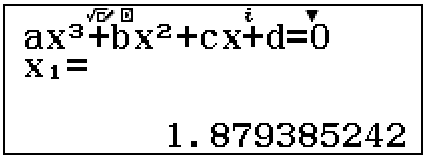
وتظهر الرسوم البيانية أدناه، المرسومة باستخدام الآلة الحاسبة CASIO fx-CG20، كيف يمكن تخيل تقاطع الرسوم البيانية من دالتين كإيجاد جذور دالة واحدة.

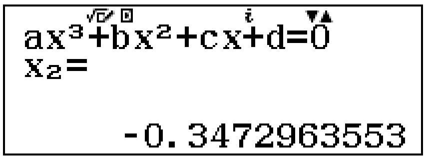


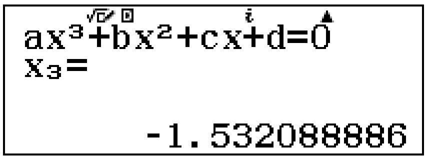


لاحظ كيف أن إحدى نقاط التقاطع قريبة من القيم التي جرى الحصول عليها في الأعلى وأن هناك جذر لدالة الفرق قريب من $x = 1.88$.

في الوحدة (4)، سترى إمكانية استخدام ClassWiz في هذه الحالة من أجل إيجاد كل الحلول الثلاثة الممكنة للمعادلة التكعيبية $x^3 - 3x - 1 = 0$ وذلك باستخدام وضعية المعادلة وذلك كما هو مبين أدناه.







ومع ذلك، يمكن استخدام الإجراءات الموضحة هنا باستخدام جدولة القيم مع زوج آخر من الدوال التي لا يمكن التعامل معها في وضعية المعادلة، كما تسمح لك جدولة القيم أيضا برؤية بشكل أفضل كيف أن قيم هذه الدوال مرتبطة.

تمارين

الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة

1. a) قم بتخزين 0.3 في الذاكرة x من أجل إيجاد $f(x) = x^3 + 4x + 1$ عندما $x = 0.3$.

b) قم بإيجاد $f(0.4)$ عبر القيام أولا بتحرير الأمر المخزن في أ) ليصبح $x = 0.4$

c) قم بإيجاد $f(0.5)$.

2. استخدم ميزة CALC من أجل إيجاد $f(x) = x^3 + 4x + 1$ عندما $x = 0.6$ و 0.7 و 0.8.

3. قم بإيجاد $g(x) = 1.2x^2 + 3.1x + 2.7$ عندما $x = 1.1$ و 1.2 و 1.3.

4. أطول قطر في غرفة مستطيلة الشكل ذات أبعاد A و B و C معطى بالتعبير $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
استخدم الميزة CALC من أجل إيجاد طول هذا القطر لغرفة ذات أبعاد 4.2 م × 7.3 م × 2.1 م، ومن أجل غرفة أخرى ذات أبعاد 3.2 م × 3.5 م × 2.1 م.

5. أنشئ جدول بقيم الدوال الخطية $f(x) = 17 - 2x$ و $g(x) = 4x - 3$ مع البدء بـ $x = 1$ والانتهاء بـ $x = 25$ وتدرج (الخطوة) 1. ومن ثم استخدم الجدول من أجل:

a) إيجاد f(14) و g(19).

b) إيجاد قيم x والتي فيها تكون $g(x) = 93$ و $f(x) = -7$.

c) صف كيف أن قيم الدوال تتغير مع تزايد x.

6. أنشئ جدول لقيم الدالة التربيعية $y = 3 - x - x^2$ من أجل قيم x بين $x = -1.5$ و $x = 1$ وتدرج (الخطوة) مقداره 0.1. استخدم جدولك لإيجاد:

a) $f(0.3)$

b) أوجد القيمة العظمى للدالة.

c) أوجد قيمة x والتي تصل فيها الدالة إلى قيمتها العظمى.

d) حدد أيها أكبر f(0.8) أم f(0.9)؟

e) أوجد قيمة (قيم) x التي تجعل $f(x) = 2.25$

f) صف فترات تزايد وتناقص الدالة.

7. استخدم جدولا مناسبا من أجل الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ لإيجاد.

a) قيم x التي فيها $f(x) = 0$

b) قيم x والتي فيها $f(x) < 0$

c) القيم العظمى من أجل f(x) ضمن الفترة $0 \le x \le 1$.

8. قم بالنظر إلى الدالة $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$. استخدم جدولا مناسبا للقيم من أجل إيجاد:

a) نقاط عدم الإتصال (إن وجدت).

b) قيم x التي فيها $f(x) < 0$

9. أوجد نقطة التقاطع للمنحنيين البيانيين $y = x^3$ و $y = x + 2$ مقربا إلى أقرب خانتين عشريتين.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. أنشئ بعض جداول القيم من أجل الدالة $f(x) = 2x + 7$ و $g(x) = 5 - 4x$.

a) قم بالتنقل بين الجداول بتدرج (الخطوة) مقداره 1 لرؤية كيف تتغير قيم f(x) و g(x) مع تزايد x.

b) قم بالتنقل بين الجداول بتدرج (الخطوة) مقداره 0.5 لرؤية كيف تتغير قيم f(x) و g(x) مع تزايد x.

c) قم بالتنقل بين جداول بتدرجات مختلفة من أجل مقارنة ما لاحظته مع الجدولين أ) و ب)

d) غير الدوال إلى $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = 3 - 4x$ وقارن ما لاحظته في الأجزاء أ) و ب) و ج)

2. قم بدراسة بعض الدوال الخطية مثل $f(x) = 5x + 7$ و $g(x) = 6 - 2x$. قارن سلوك الدوال هذه مع الملاحظات التي حصلت عليها من النشاط السابق.

3. قم بإنشاء جدول لدالة التربيعية $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ من $x = -14$ إلى $x = 15$ ، مع تدرج (الخطوة) مقداره 1. لاحظ كيف أن بعض القيم هي نفسها (مثلا f(6)=f(-4)). قم بدراسة هذه الحالات مليا لرؤية إن كان هناك أزواج أخرى متساوية أيضا. لاحظ أن قيم f(x) لا تتغير بنفس القدر في كل مرة تتغير فيها قيمة x (على عكس حالة الدالة الخطية). استخدم القيم في الجدول من أجل رسم منحنى الدالة على الورق. أي جوانب المنحنى يمكن التنبؤ بها من الجدول؟

4. جرى رمي حجر صغير في الهواء من على الأرض. ارتفاع الحجر بعد t ثانية معرف بالعلاقة التالية $h(t) = 30t - 4.9t^2$.

a) استخدم جدول القيم لهذه الدالة لمعرفة الارتفاع الأقصى الذي وصله الحجر والزمن الذي حدث فيه ذلك؛ قد يكون من المفيد استخدام جدول القيم لرسم منحناها.

b) كم ثانية استغرقها الحجر للعودة إلى الأرض.

5. بالنظر للدالة التكعيبية التالية المعطاة بالشكل $y = x^3 - 2x - 1$.

a) استخدم جدولا مناسبا للقيم لرؤية إذا ما كان هناك جذر للمعادلة عندما $x = -1$ وعندما تكون x بين $x = 1$ و $x = 2$.

b) استخدم جدول القيم التي هي بين $x = 1$ و $x = 2$ من أجل إيجاد الجذر بأقرب دقة الممكن.

c) هناك جذر آخر للدالة قرب $x = -1$. استخدم عملية مشابهة من تكرار جدول القيم من أجل إيجاد هذا الجذر بأقرب دقة ممكنة. قد يساعدك رسم المنحنى للقيام بذلك بشكل فعال.

d) استخدم خاصية CALC مع التعبير $x^3 - 2x - 1$ للتحقق من مدى قرب الجذور التي عثرت عليها من الجذور الحقيقية للدالة.

6. تملك مقلوب الدوال نقطة عدم إتصال، والتي تكون قيمة الدالة عندها غير معرفة. يمكنك إيجاد قيم x المترافقة من الجدول إذا درست الدالة بعناية، ستكون قادرا على التنبؤ بهذا مقدما. جرب هذه العملية من أجل الدوال التالية: تنبأ أين سيكون هناك عدم إتصال وقم بإنشاء جدول يؤكد القيم التي وصلت لها.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ (d) $f(x) = \dfrac{2}{3x-4}$

قم بصنع بعض الأمثلة الإضافية المشابهة واستكشف خصائصها.

ملاحظات من أجل المعلمين

تسلط هذه الوحدة الضوء على الطرق التي يمكن فيها لـ *ClassWiz* دعم الطلبة فيما يتعلق بالدوال الأولية (الخطية والتربيعية والتكعيبية والمقلوب) وذلك عبر تعيين قيم الدالة عند نقطة ما أو في جدول قيم. تجعل هذه الوحدة هذه من استخدام وضعية الجدول أمرا مهما للعمل. وبالرغم من أن بعض منحنيات الدوال المعروضة مرسومة بالآلة البيانية CASIO fx-CG20، من المهم الإدراك هنا أن *ClassWiz* لا تتيح إمكانية تنفيذ رسوم بيانية بها، بالتالي كان التأكيد على التصور البصري للدوال وتحديد خصائصها عبر استخدام الجداول بشكل مناسب. يجب على الطلاب قراءة هذه الوحدة ومساعدتهم على رؤية كيفية استخدام هذه الآلة الحاسبة من أجل معاينة أنواع الدوال المختلفة. وبينما يجب على الطلاب القيام بالتمارين بأنفسهم، من الأفضل القيام بها مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة النتائج معا والتعلم من بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. (a) 2.227 (b) 2.664 (c) 3.125 2. 3.616, 4.143, 4.712

3. 7.562, 8.148, 8.758 4. 8.68 م و 5.19 م

5. (a) -21, 73 (b) 24,12 (c) مع تزايد x بمقدار 1 تتزايد f(x) بمقدار 2 و g(x) بمقدار 4

6. (a) 2.61 (b) 3.25 (c) 0.5 (d) f(0.8) = 1.56 (e) $x = -1.5$ و$x = 0.5$

(f) تتزايد الدالة عندما x < -0.5 وتتناقص عندما x > -0.5

7. (a)رسم الجدول من أجل f(x) بتدرج (الخطوة) مقداره 1 لإيجاد x = 0 أو 1 أو 2.

(b) رسم جدول من أجل f(x) بتدرج (الخطوة) مقداره 0.5 لإيجاد x < 0 و $1 < x < 2$.

(c) رسم جدول f(x) مع خطوات متتالية أصغر من أجل إيجاد $f(0.423) \approx 0.385$.

8. استخدام تدرج (الخطوة) مقداره 1 من أجل إيجاد (a) $x = 5$ (b) x < 5 9. (1.52,3.52)

أنشطة

1. إن الغرض الرئيسي من هذا النشاط هو السماح للطلاب بمعرفة كيفية تزايد أو تناقص الدالة الخطية بشكل ثابت، ممثل بميل لدالة. يجب الافتراض بأن الطلاب لم يكونوا على علم بمفهوم الميل، بالتالي من الممكن القيام بنشاط لمساعدتهم على فهم الفكرة وإلقاء نظرة أقرب على المثال. وتعتبر عملية رسم المنحنيات من الجداول من الأمور المساعدة لهم على فهم النشاط.

2. يملك هذا النشاط نفس غاية النشاط السابق، إلا أنه يقدم شروحا أقل للطلاب. يجب على الطلاب إنشاء دالتين واحدة بميل موجب وأخرى بميل سالب، ويجب عليك تشجيع الطلاب لمحاولة تجربة أمثلة أخرى بأنفسهم.

3. يتعلق النشاط التالي بالدوال التربيعية، والفكرة الرئيسية هي السماح للطلاب بفهم طبيعة العلاقات التربيعية. في هذا النشاط، سيجري التأكيد على تناظر العلاقة. يجب تشجيع الطلاب على رسم المزيد من الرسوم البيانية على الورق. [الإجابات: إن التقاطع بين المحور x عندما $x = -1$ و $x = 3$ يمكن التنبؤ به من صيغة الدالة وذلك بالرغم من أن الطلاب قد يتفاجؤون بمنحنى الدالة. سوف تساعد هذه النقاط على التنبؤ بمحور التناظر $x = 1$] .

4. يقدم هذا النشاط السياق إضافة إلى الاستكشافات الرياضية، كما أنه يعطي معاني مهمة لفكرة القيمة العظمى والجذر. [الإجابات: تصل الصخرة أقصى ارتفاع 45.9 متر بعد 3.06 ثانية، وتعود إلى الأرض بعد 6.12 ثانية].

5. يؤكد النشاط على فكرة "التقريب" في الجدول من أجل صقل القيم والحصول على تقريبات أفضل. سيكون الطلاب الآن قادرا على الحصول على تقريبات جيدة للجذور قرب 1.618 و -0.618 إلا أنها لن تؤدي إلى الوصول إلى قيمة الصفر في حال تطبيقها d). الجذر الدقيق هو عند $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ويمكن أن يقود إلى مناقشة مثمرة حول القيم التقريبية وتلك الدقيقة. يمكنك اختيار إعطاء هذه القيم للطلاب للتحقق منها ومن ثم تمييز الأفكار الخاصة بالقيم التقريبية والدقيقة.

6. في هذا النشاط، التركيز منصب على الجداول التي تعطي عبارة "خطأ" بما أن القسمة على العدد صفر غير معرفة. قد لا يكون الطلاب على معرفة مع التعريف الرياضي لعدم الإتصال، بالتالي يعد منحنى دالة المقلوب (مثل ذاك الموجود هذه الوحدة) مفيد جدا لهم. تتزايد عملية إنشاء أربع جداول في الصعوبة، (وخصوصا في الفقرة c)، حيث يجب أن تتضمن الخطوة أنصافا. وفي القسم d) يجب أن تتضمن أثلاثا،ادخل التدرج (الخطوة) عبر 1a3) [الإجابات: (a) $x = 0$ (b) $x = 5$ (c) $x = -3/2$ (d) $x = 4/3$].

الوحدة الرابعة
المعادلات و المتباينات

تعد المعادلات والمتباينات من العناصر المهمة في الجبر. تقدم *ClassWiz* عددا من الطرق المختلفة لحلها. ويمكن إيجاد حلول تقريبية عددية للمعادلات على هذه الآلة الحاسبة؛ أما الحلول الدقيقة فتتطلب إما تحليلا جبريا أو نظام حاسوب جبري.

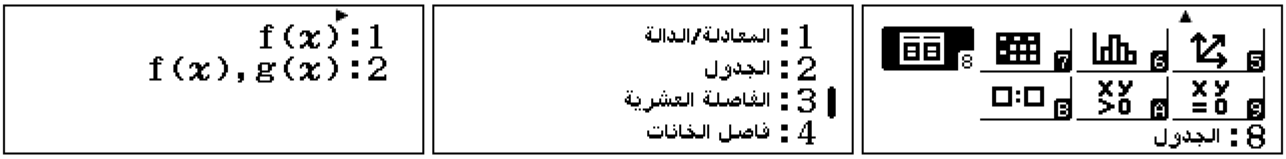
سوف نستخدم في هذه الوحدة وضعية الجدول، وضعية المعادلة/الدالة، وضعية المتباينات، وضعية التناسب وأوامر CALC و SOLVE. تأكد من أن آلتك الحاسبة موضوعة على وضعية رياضي/رياضي من أجل كل من المدخلات والمخرجات و *Norm* 2. استخدم SET UP (الإعدادات) للقيام بذلك إذا لزم الأمر.

المعادلات، المتباينات والجدول

تكمن الفكرة الأساسية من حل معادلة بمتغير واحد في إيجاد قيم المتغير – إن وجدت – التى تجعل المعادلة صحيحة. حالما يجري إيجاد حلول المعادلة، يمكن حل المتباينات المرتبطة بها. هناك عدد قليل من الطرق لحل المعادلات باستخدام جدولة القيم لدالة مناسبة.

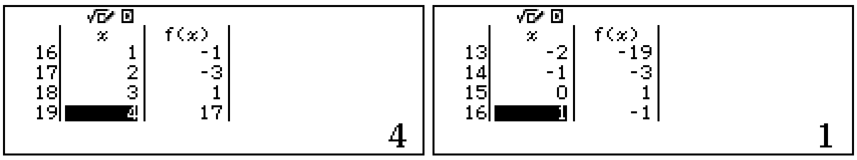
على سبيل المثال، انظر للمعادلة $x^3 = 3x^2 - 1$ حيث يكون حل هذه المعادلة هو حل أيضا للمعادلة المرتبطة بها وهي $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. بالتالي، سوف نستخدم الآلة الحاسبة لجدولة قيم هذه الدالة لنرى أي قيم x (إن وجدت) تجعل الدالة تساوي صفر.

قم بالوصول إلى وضعية الجدول عن طريق [9] [MENU]. تسمح لك *ClassWiz* بعمل جدول لدالة أو دالتين. عندما تحتاج إلى دالة واحدة فقط، يمكنك اختيار وضع جدولة دالة واحدة فقط باستخدام SET UP وذلك كما هو موضح أدناه، أو يمكنك ببساطة جدولة دالتين، و لكن مسح أي تعاريف لـ g(x).



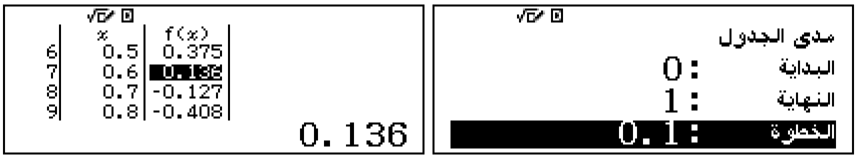
ادخل الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ كما هو مبين أدناه. (لاحظ وجود أمر x^3 عبر النقر على [x^2] [SHIFT]). قم بعمل جدول لهذه الدالة ضمن مجال مناسب. ابدأ بالنقر على [=]. في هذه الحالة، ودون أي معلومات عن الحلول، من الحكمة استخدام مجموعة واسعة للبدء بها. ومع السماح فقط بـ 30 قيمة، سوف نختار قيم لـ x تتراوح من ‎-14 إلى 15 وتشمل العددين، وذلك كما هو مبين أدناه. قم بالنقر على [=] بعد كل قيمة في شاشة مدى الجدول.

استخدم المؤشري[▲] و [▼] للتنقل في العمود الثاني، مع القيام بالبحث عن قيم الدالة الصفرية أو القريبة من الصفر. انظر أيضا لرؤية فيما إذا كان هناك أماكن تتغير فيها قيم الدالة بين موجبة وسالبة، حيث يشير ذلك لوجود قيمة بينهما تساوي صفر.

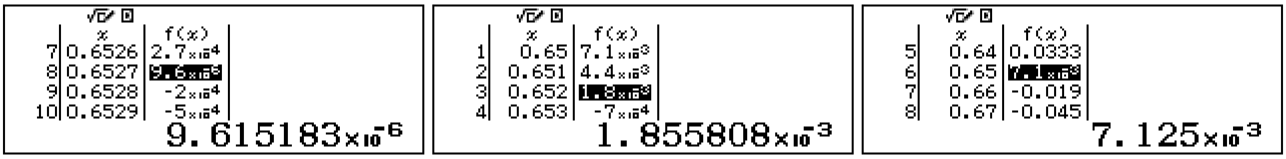


في هذه الحالة، لا يبدو بأن هناك أية قيم في الجدول تجعل f(x) = 0. ولكن هناك تغيير في الإشارة ضمن الفترات $-1 < x < 0$، و $0 < x < 1$ و $2 < x < 3$ الأمر الذي يشير إلى أن الدالة تملك جذورا في كل من هذه الفترات الثلاث. سنستكشف منها واحدة فقط وهي الفترة: $0 < x < 1$.

انقر على AC للعودة إلى تعريف الدالة وقم بالتركيز بشكل أقرب على هذا الفترة عن طريق تحديد البداية على أنها 0 و النهاية على أنها 1 و الخطوة على أنها 0.1.



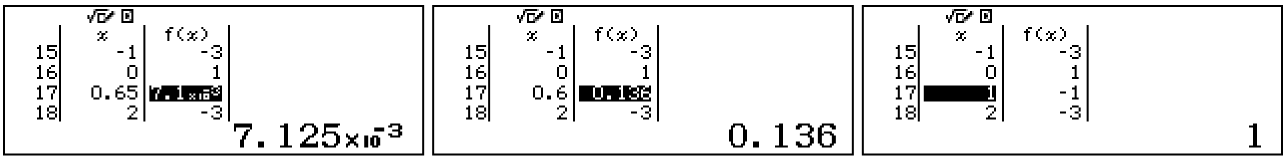
ادرس هذا الجدول بدقة. عندما تكون x = 0.6، تكون قيمة الدالة موجبة، وعندما تكون x = 0.7 تكون قيمة الدالة سالبة، بالتالي لا بد من أن يكون الصفر في مكان ما بين هاتين القيمتين لـ x. لذلك نكرر عملية تكوين الجدول، في هذه المرة باستخدام الفترة [0.6, 0.7] وفيه $0.6 \le x \le 0.7$ وخطوة أصغر هي 0.01. وتعرض الشاشة الأولى في الأسفل النتيجة.



في كل مرة تقوم فيها بتكرار هذه العملية، تصبح الفترة أصغر حيث نرى في الشاشتين الموجدتين في الأعلى استخدام الفترات [0.65,0.66] و [0.652,0.653] على الترتيب. في كل مرة، يجري تقليل الخطوة بعامل عشر، بالتالي ستكون النتيجة أقرب إلى الجذر الفعلي. أما الشاشة الثالثة، فتعرض كيف أن الدالة تملك صفرا بين x = 0.6527 و x = 0.6528 .

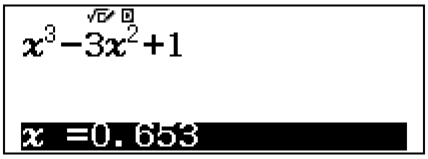
وعليك أن تقرر بنفسك مستوى الدقة المناسب. حيث تعرض هذه الجداول كيف أنه هناك جذر دالة عند كل من $x \approx 0.653$. بالتالي فإن $x \approx 0.653$ قريب من حل المعادلة. يمكنك متابعة هذه العملية من أجل الحصول على تقريب أكثر دقة للحل، ولكن ولكون الحل عدد غير نسبي، لن تكون قادرا على الحصول على الحل الدقيق.

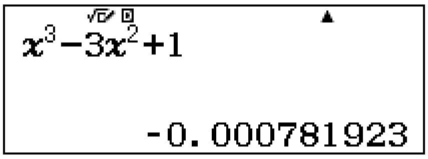
هناك طريقة أخرى يمكنك فيها استخدام الجدول لإيجاد حل تقريبي للمعادلة. ابدأ مع الشاشة على اليمين أدناه، والتي جرى الحصول عليها في الأساس. استخدم لوحة المفاتيح لإدخال تقريبات إلى أقرب حل ممكن في عمود x ثم إضغط = من أجل إيجاد f(x) في كل مرة. هناك مثالان معروضان في الأسفل فيهما x = 0.6 و x = 0.65.



تابع عملية تغيير قيمة x حتى تكون قيمة f(x) قريبة بقدر كافى من الصفر.

يمكنك التحقق من مدى قرب حلك من الحل الدقيق من خلال رؤية مدى قرب $x^3 - 3x^2 + 1$ من الصفر عندما تكون $x = 0.653$. هناك طريقة جيدة للقيام بذلك تكمن بالرجوع إلى وضعية الحساب (عمليات حسابية) ومن ثم إدخال التعبير على الشاشة كما هو مبين أدناه. ثم الضغط على مفتاح CALC وإدخال قيمة x على أنها 0.653، ثم النقر على = لمعرفة القيمة.

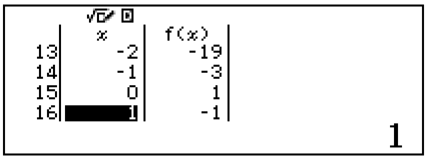


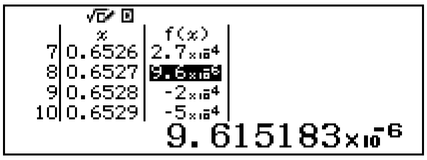


عندما تكون $x = 0.653$، يكون قيمة التعبير 0.000781923- وهي قريبة جدا من 0، بالتالي تكون قيمة x قريبة إلى حل المعادلة. إذا كنت ترغب، يمكنك النقر على = ومن ثم اختيار قيم أخرى بنفس الطريقة حيث يمكنك رؤية أن $x = 0.6527$ هي أقرب إلى حل للمعادلة. (ولكن لا تنقر على C إلا إذا كنت ترغب في حذف التعبير).

هناك حلان آخران لهذه المعادلة، كما رأيت سابقا حيث يمكنك استخدام نفس هذه الإجراءات للعثور عليهما بنفسك. وللتحقق، ستجد أن $x \approx -0.532$ و $x \approx 2.879$.

حالما يجري حل المعادلات، يمكن حل المتباينات. على سبيل المثال، يمكن إعادة كتابة المتباينة $x^3 < 3x^2 - 1$ بالشكل $x^3 - 3x^2 + 1 < 0$. توضح الجداول المستخدمة في حل المعادلة بعض قيم x والتي تكون فيها الدالة سلبية وذلك مثل تلك الموجودة في الأسفل:

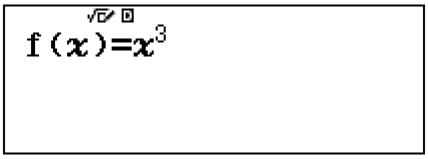


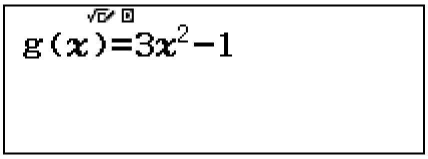


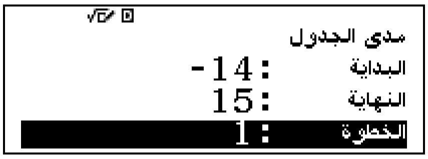
حالما يتم العثور على حلول للمعادلة، يمكن كتابة حلول المتباينة.

استخدام جدولان

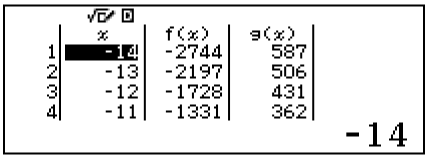
يمكن استخدام أفكار مماثلة لحل المعادلات و المتباينات باستخدام جدولين، مع دالة منفصلة مرتبطة بكل طرف من طرفي المعادلة. لننظر مرة أخرى إلى نفس المعادلة، $x^3 = 3x^2 - 1$.

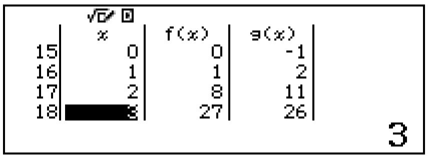


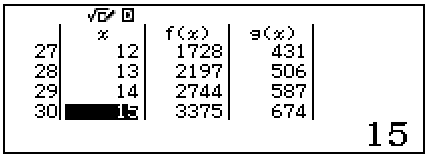




قم بدراسة الجداول بعناية. وفيما يلي بعض المقتطفات:



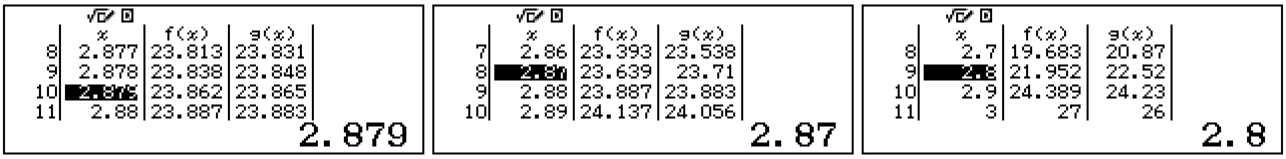




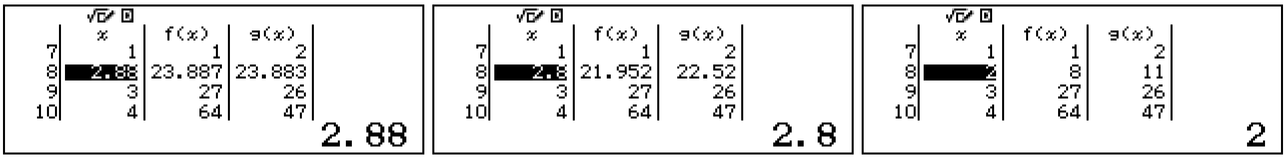
يظهر على الشاشة الأولى قيم عديدة من أجل x فيها $f(x) < g(x)$ أو $x^3 < 3x^2 – 1$. بالمثل، يظهر على الشاشة الثالثة قيم عديدة لـ x فيها $f(x) > g(x)$ أو $x^3 > 3x^2 - 1$.

أما الشاشة الوسطى، فالوضع فيها أكثر تعقيدا وذلك على اعتبار $x^3 > 3x^2 - 1$ عندما $x = 0$ و $x = 3$، ولكن $x^3 < 3x^2 - 1$ عندما $x = 1$ و $x = 2$.

يمكن استخدام إجراءات مشابهة لأجل تلك المعادلات الموجودة في القسم السابق من أجل إيجاد تقريبات جيدة لحلول المعادلة. على سبيل المثال، تسمح لك الشاشات المتعاقبة أدناه بحل المعادلة بين $x = 2$ و $x = 3$ عبر البحث عن قيم x التي فيها $f(x) = g(x)$؛ ويعني هذا أن القيم في العمودين هما متساوين. تابع هذه العملية بنفسك لخطوة واحدة إضافية على الأقل.



أما النهج البديل فهو في تغيير قيمة x بشكل متتالي من أجل الاقتراب أكثر وأكثر من القيم التي يكون فيها $f(x) = g(x)$. إليك بعض الشاشات الممكنة:

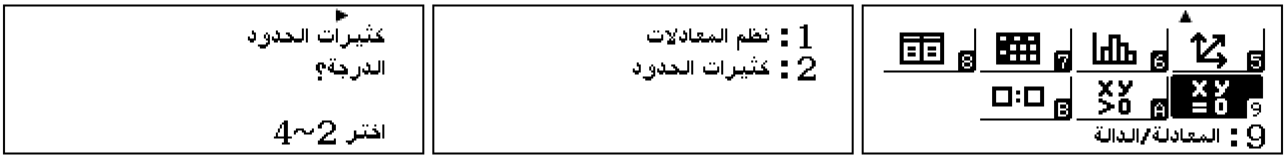


تابع هذه العملية بنفسك من أجل الحصول على أفضل تقريب ممكن لقيمة x من أجل $f(x) = g(x)$.

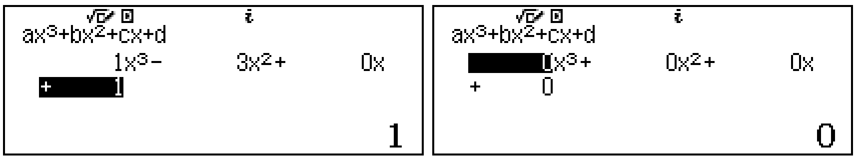
وحالما يجري إيجاد تقريبات جيدة، يمكنك استخدامها من أجل كتابة الحلول الخاصة بالمتباينات المرتبطة معها. في هذه الحالة على سبيل المثال، يبدو وكأن $x \approx 2.88$ هو أحد حلول المعادلة $x^3 = 3x^2 - 1$. بعد ذلك، وعن طريق استخدام الجدول لمساعدتك على التفكير، ستجد أن الجزء الخاص بالحل لـ $x^3 > 3x^2 - 1$ هو $x > 2.88$

حل المعادلة التلقائي

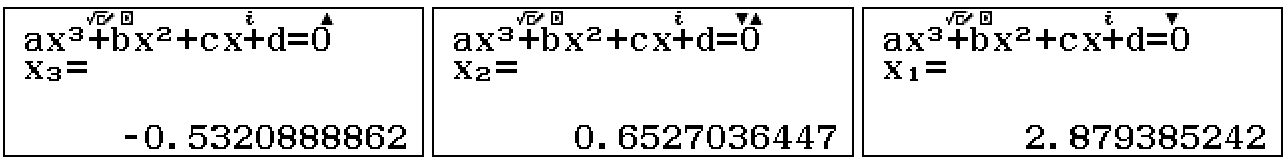
تعتبر الإجراءات المذكورة في الأعلى مهمة لكونها تؤكد على معنى حل المعادلة أو المتباينة. ومع ذلك، هناك طرق أسرع وأكثر كفاءة في حل المعادلات التكعيبية و المتباينات على هذه الآلة الحاسبة. استخدم MENU 9 من أجل اختيار وضعية المعادلة/ الدالة، ثم انقر 2 لاختيار كثيرات الحدود ثم 3 لاختيار المعادلات التكعيبية وذلك كما هو موضح في الأسفل:



تحتاج إلى إدخال المعاملات a و b و c و d الخاصة بالمعادلة $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ بنفس الترتيب المبين في الأسفل. في هذه الحالة، ستكون المعاملات 1، 3-، 0 و 1 على الترتيب. انقر على = بعد إدخال كل معامل.



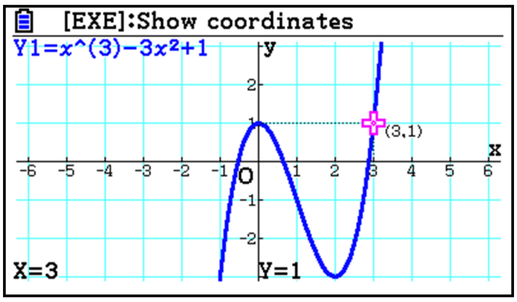
لحل المعادلة الآن، ببساطة اضغط على = مرة آخرى وذلك للحصول على ثلاثة جذور بالترتيب، كما هو موضح أدناه.



لاحظ أن الحل الأول يتفق مع ذلك الموجود باستخدام الجدولين في القسم السابق، في حين أن الحل الثاني يتفق مع ذاك الموجود باستخدام جدول واحد. وبينما هذه هي أفضل تقريبا من تلك الموجودة باستخدام الجداول في الأعلى، ما تزال هي حلول تقريبية.

إذا ضغطت AC، ستعود إلى المعامِلات وإذا ضغطت عليه مرة ثانية، سيجري مسح كل المعاملات.

في هذه الحالة تملك المعادلة التكعيبية ثلاثة حلول دقيقة. يمكنك استخدام القيم التي تم الحصول عليها سابقا في رسم منحنى الدالة المستخدمة في جدول مفرد $f(x) = x^3 – 3x^2 + 1$. سيساعدك هذا على رؤية لماذا تملك هذه المعادلة ثلاثة حلول. يعرض الرسم البياني أدناه، رسم باستخدام كاسيو fx CG-20 أن حلول المعادلة هي جذور الدالة (أي قيم x والتي فيها يتقاطع منحنى الدالة مع المحور x).



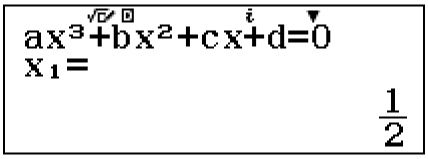
سيكون للمعادلات التكعيبية عادة ثلاثة حلول، ولكن بعض تلك الحلول أحيانا قد تكون أعدادا مركبة، وهو الأمر الذي سيجري التحدث عنه في الوحدة 9. كتوضيح على ذلك، انظر للمعادلة

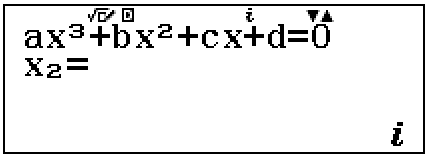
$$2x^3 + 2x = x^2 + 1$$

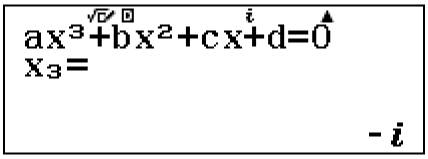
من أجل إدخال المعاملات الخاصة بهذه المعادلة في الآلة الحاسبة، عليك إعادة ترتيبها ضمن الشكل المطلوب، بشكل تنازلي بحسب قوى/أس x مع a = 2 ، b = -1 ، c = 2 وd = -1 :

$$2x^3 – x^2 + 2x – 1 = 0$$

ادخل هذه المعادلة إلى الآلة الحاسبة، ثم انقر على من أجل التحقق من أن الجذور الثلاثة هي كما هو موضح في الأسفل.





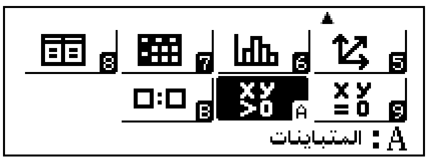


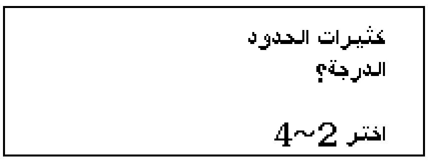
في هذه الحالة، اثنين من الجذور هما أعداد مركبة x = i و x = -i

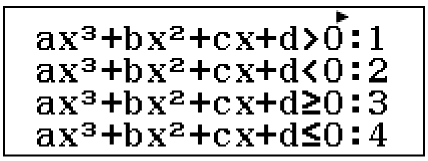
حل المتباينة التلقائي

كما لاحظت أعلاه، يمكن استخدام حلول المعادلة من أجل حل المتباينات المرتبطة بها. ومع ذلك، تتيح لك الآلة الحاسبة حل المتباينة بشكل تلقائي أيضا. انظر للمتباينة التي جرى دراستها من قبل: $x^3 > 3x^2 - 1$.

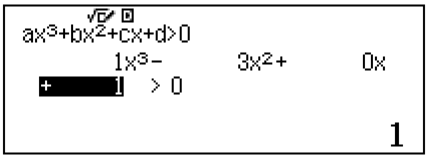
استخدم MENU A للدخول إلى وضعية المتباينات. اختر 3 من أجل أعلى قوى/أس للمتباينة ومن ثم 1 لاختيار النموذج الذي يطابق المتباينة مثار الاهتمام (> في هذه الحالة).





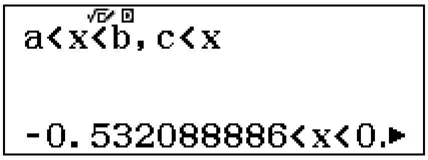


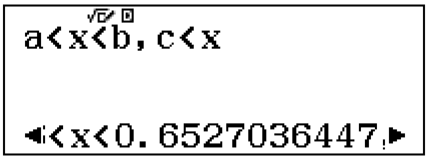
من الضروري أن نفكر أن تتناسب المتباينة مع صيغة الآلة الحاسبة. في هذه الحالة، يجب كتابة المتباينة هذه: $x^3 > 3x^2 - 1$ بالشكل: $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$. أدخل المعاملات a = 1 ،b = -3 ،c = 0 و d = 1 كما هو مبين أدناه:

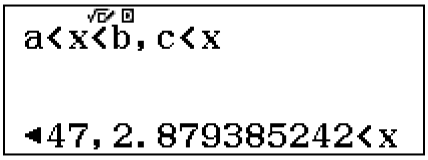


انقر على ⊜ للحصول على الحلول. تشير النتائج $a < x < b$ و $c < x$ إلى أن هناك فتراتان فيهما تكون قيمة المعادلة $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$. [لاحظ أن a، b، وc ليست هي معاملات المتباينة الأصلية، ولكنها تستخدم لإظهار شكل الحل.]

في هذه الحالة، لن يتسع الحل في الشاشة حيث سنرى سهما على اليمين في الشاشة. من أجل رؤية الحل بشكل كامل، ستحتاج إلى استخدام مفاتيح المؤشر ▶ و ◀ وذلك كما هو موضح أدناه.







قم بالتقريب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية، والحلول هي $-0.532 < x < 0.653$، و $x > 2.879$ والتي هي قيم x التي يكون فيها الرسم البياني أعلاه فوق المحور x وهكذا يكون لدينا $x^3 - 3x^2 + 1 > 0$، أو $x^3 > 3x^2 - 1$

حل المعادلات التربيعية و المتباينات

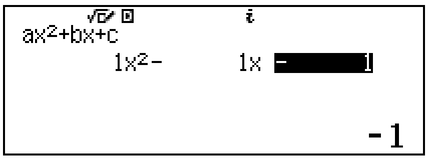
يتوفر أيضا نمط حل المعادلة التربيعية التلقائي وذلك في وضعية المعادلة حيث يعمل بنفس الطريقة التي يجري فيها حل تلك التكعيبية، أي أن الأمر يتطلب إدخال المعاملات بطريقة تنازلية بحسب القوى/الأس x. تملك المعادلات التربيعية حلين لا ثلاثة كما هو حال المعادلات التكعيبية، كما أنها قد تكون أيضا في شكل أعداد مركبة.

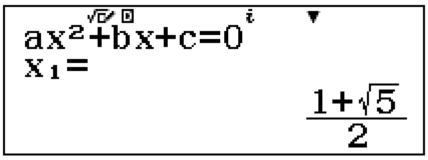
لتوضيح هذه العملية، قم بالنظر في مسألة إيجاد العدد الذي يمكن تربيعه بإضافته إلى نفسه. إذا كان العدد الذي يجري تمثيله هو n، فإن المعادلة الممثلة لهذه الحالة هي $n^2 = n + 1$. لحل هذه المعادلة ضمن نمط حل المعادلات من الدرجة الثانية في الآلة الحاسبة، تحتاج إلى إعادة ترتيبها بحسب النموذج القياسي المعروض في الآلة الحاسبة:

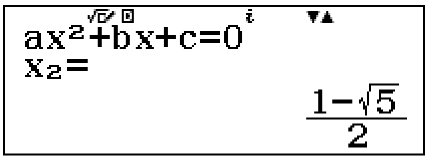
$$ax^2 + bx + c = 0$$

في هذه الحالة، تؤدي عملية إعادة ترتيب المعادلة إلى حصولنا على $n^2 - n - 1 = 0$ والتي هي مكافئة للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$.

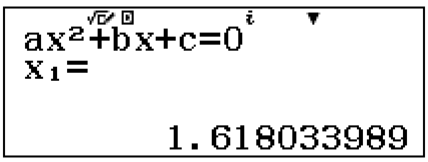
في وضعية المعادلة، اختر النوع 2 ثم أدخل المعاملات الثلاثة $a = 1$ ، $b = -1$ و $c = -1$.

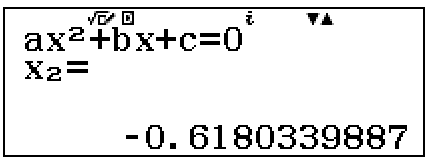




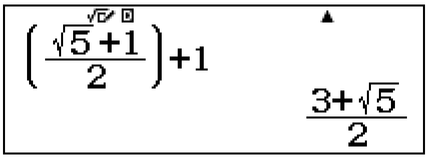


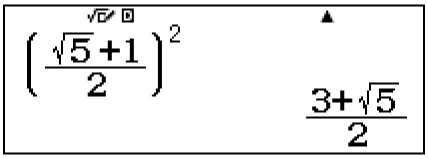
يعتبر كلا الحلان غير نسبيين، ولكنهما معروضان في الأعلى بصيغتهما الدقيقة (على اعتبار أنه جرى وضع ClassWiz على نمط رياضي/رياضي). يمكن الحصول على تقريب عشري باستخدام مفتاح S⇔D:



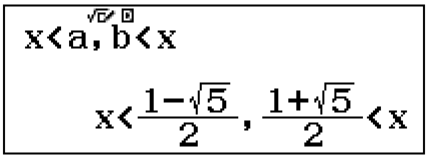


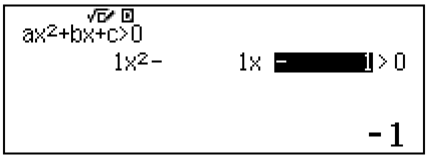
أحد الحلول في هذه الحالة هو النسبة الذهبية، والتي كان اليونانيون معجبين بها للغاية، حيث تعرض الشاشة في الأسفل على أن هذا الحل يحقق الخاصية المطلوبة $x^2 = x + 1$.

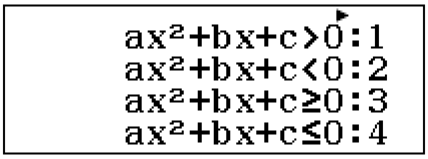




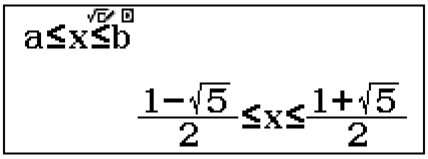
بشكل مشابه، يمكن حل المتباينات من الدرجة الثانية ضمن نمط المتباينة والذي يمكن الوصول إليه عبر زري MENU A. من أجل حل المتباينة $x^2 > x + 1$، عليك أولا إعادة كتابتها بالشكل $x^2 – x – 1 > 0$، ومن ثم سيجري الحصول على الحل مباشرة:

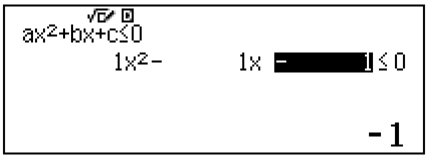






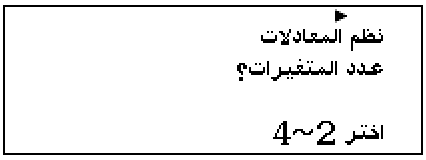
يتألف هذا الحل من فترتين منفصلتين (مفتوحتين). المتباينة المرتبطة، $x^2 – x – 1 \le 0$، تتحقق في فترة واحدة لقيم x بين نفس القيمتين:

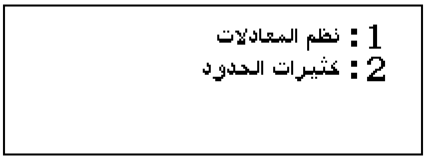




نظم المعادلات الخطية

تشمل بعض المعادلات أكثر من متغير واحد. في وضعية المعادلة/الدالة، يمكن حل نظم المعادلات الخطية ذات متغير واحد، متغيرين، ثلاثة أو حتى أربعة متغيرات. بعد إختيار نظم المعادلات 1 ، تحتاج إلى إختيار عدد المعادلات المتزامنة:





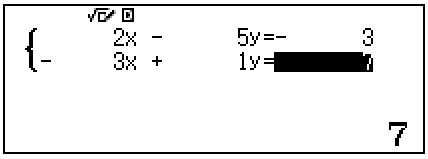
تعتبر العملية هي نفسها في كل حالة، لذا فإننا سوف ننظر حاليا إلى معادلتين بمتغيرين:

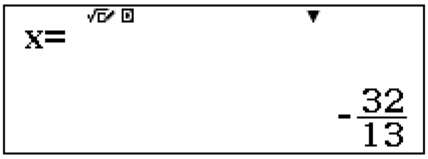
$$2a + 3 = 5b$$
$$b – 3a = 7$$

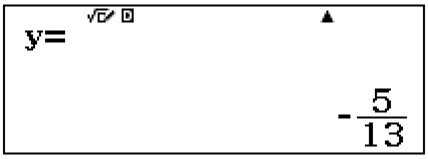
من أجل إدخال النظام في الحاسبة، تحتاج إلى التفكير في المتغيرات على أنها x و y بدلا من كونها a و b إضافة إلى إعادة كتابة المعادلات مع الحدود الثابتة على الجانب الأيمن من علامة =. عمل هذه التغييرات يؤدي إلى إنتاج نظام معادلات مكافئ:

$$2x – 5y = -3$$
$$-3x + y = 7$$

إختر حالة المتغيرين عن طريق النقر على 2 ثم أدخل المعاملات الستة كما هو مبين في الأسفل في الأماكن المناسبة. تأكد من أنك تستخدم مفتاح (–) للإشارات السالبة. انقر على = بعد إدخال كل معامل، واستخدم مفاتيح المؤشر للعودة مسافة للخلف إذا لزم الأمر لتصحيح أي أخطاء في الكتابة. يمكن الآن الحصول على حلول للمعادلة من خلال النقر على = مرة أخرى، مرة واحدة لكل متغير:





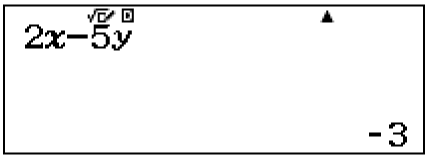


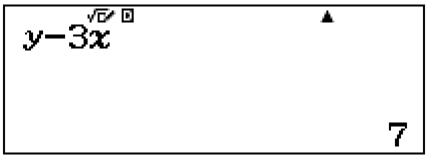
إذا كنت تريد الحل بشكل نتيجة عشرية، اضغط على مفتاح S⇔D بعد الحصول على كل حل.

يمكنك التاكد من أن الحلول x = -32/13 و y = -5/13 تحقق الزوج الأصلي للمعادلات بالتعويض. عادة من الأفضل القيام بذلك يدويا. ولكن كون القيم مربكة قليلا لتعامل معها في هذه الحالة، سنقوم بوصف وسيلة فعالة للقيام بذلك في وضعية الحساب، وذلك بعد تخزين الحلين اللذان حصلنا عليهما أول مرة في ذواكر x و y في وضعية المعادلة/الدالة.

عندما يتم العثور على حل من أجل x، قم بتخزينه مباشرة في الذاكرة x عبر ضغط STO ثم x. وبالمثل، حالما يتم الحصول على حل من أجل y، احفظه مباشرة في الذاكرة y عبر ضغط STO ثم S⇔D.

بعدها تحول إلى وضعية الحساب بضغط MENU 1. قم بحساب الطرف الايسر من كل معادلة لترى كيف أن هاتين القيمتين لـ x و y تحققان بالفعل كلا المعادلتين، كما هو مبين أدناه:



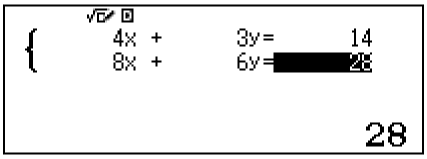


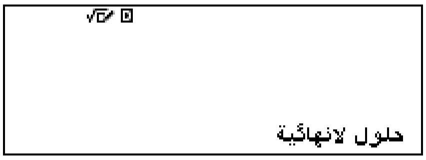
من أجل هذه القيم لـ x و y، فإن 2x - 5y = -3 و y - 3x = 7، وهو المطلوب من قبل المعادلات المتزامنة.

عليك أن تكون حذرا مع نظم المعادلات الخطية لكونه لا يوجد حل لبعضها أحيانا. على سبيل المثال، انظر للمثال التالي من المعادلات:

$$4x + 3y = 14$$
$$8x + 6y = 28$$

لدى محاولة حل هذا النظم بالآلة الحاسبة، تشير النتيجة أن هناك حلولا لانهائية كما هو مبين أدناه.



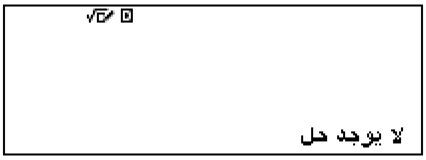


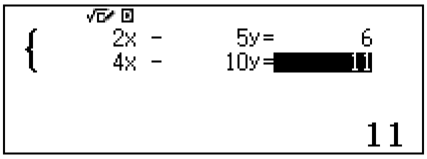
في هذه الحالة، كلا المعادلتين هما نسخ مختلفة من نفس المعادلة. لاحظ أن المعادلة الثانية هي "ضعف" المعادلة الأولى، بالتالي، أي زوج من القيم التي تحقق المعادلة الأولى، ستحقق المعادلة الثانية أيضا. على على سبيل المثال، القيم x = 2 و y = 2 تحقق المعادلتين، كذلك x = 5 و y = -2، بالإضافة إلى x = 8 و y = -6 وعدد لانهائي من الحلول الأخرى. إذا كانت 4x + 3y تساوي 14، كما تتطلب المعادلة الأولى، بالتالي فإن 8x + 6y = 2(4x + 3y) ستكون مساوية لـ 28، كما ينص حل المعادلة الثانية. يجري وصف مثل هذه المعادلات على أنها معتمدة (dependent) وليس لديها حل فريد.

هناك طريقة أخرى فيها نظم المعادلات الخطية قد لا يكون له حل. هنا مثال:

$$2x – 5y = 6$$
$$4x – 10y = 11$$

عند حل هذا النظم في الآلة الحاسبة، لا يجري العثور على أي حل:





في هذه الحالة، هاتين المعادلتين ليستا متكافئتين كما هي الحالة السابقة. ولكن لو درستهما بعناية، سترى المشكلة. إذا كانت $2x - 5y = 6$، فإن $2(2x - 5y) = 4x - 10y$ يجب أن تساوي $2 \times 6 = 12$. ومع ذلك، فإن المعادلة الثانية في هذه النظم هي $4x - 10y = 11$، وهي بذلك غير متسقة مع المعادلة الأولى. وتسمى نظم المعادلات المشابهة لهذه الحالة باسم نظم المعادلات "الغير متناسقة" (Inconsistent) ولا يوجد لها حل.

استخدام Solve

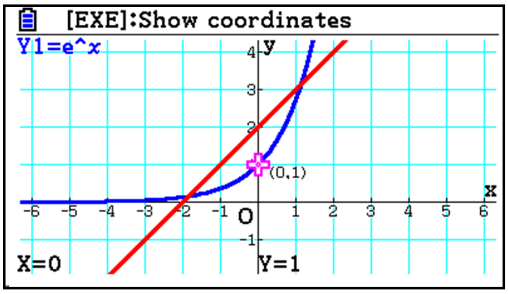
هناك عدة أنواع أخرى من المعادلات غير التي ذكرناها في الأعلى (نظم المعادلات الخطية، التربيعية والتكعيبية). في هذه الآلة الحاسبة، هناك الأمر Solve والذي يساعد على إيجاد الحل العددي لأي معادلة تملك متغيرا واحدا فقط، والذي يكون في العادة x.

انظر على سبيل المثال للمعادلة:

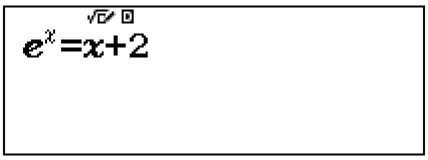
$$e^x = x + 2$$

لا تتناسب هذه المعادلة مع أي فئة من فئات المعادلات الأربع التي جرى التحدث عنها في نمط المعادلات. ومع ذلك يمكن حلها (تقريبيا) بواسطة الآلة الحاسبة.

ويساعد في فهم معنى المعادلة، تخيل (أو الرسم السريع) الرسم البياني المقابل لها. في هذه الحالة، يقترح الرسم البياني (ناتج باستخدام الآلة الحاسبة البيانية CASIO fx-CG20) أن هناك حلّان للمعادلة، تقابل نقطتي تقاطع الرسم البياني لكل من $y = e^x$ و $y = x + 2$.

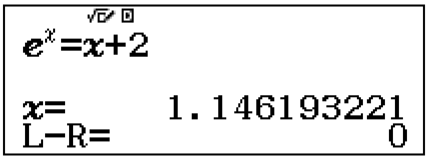


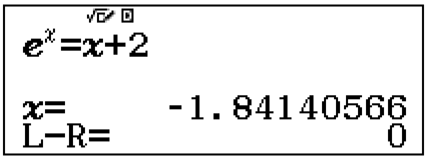
في نمط الحساب ضمن الآلة الحاسبة، قم بإدخال المعادلة على النحو المبين أدناه، وذلك عبر النقر على ALPHA CALC من أجل إشارة التساوي (وهذا يعني، عدم استخدام إشارة = العادية على الآلة الحاسبة). لا تنسى استخدام ▶ للخروج من أس/قوى e. لا تضغط على مفتاح = عند الانتهاء.



للبدء بعملية حل هذه المعادلة، أدخل أمر solve باستخدام SHIFT CALC. ستسألك الآلة الحاسبة عن تخمين أولي لقيمة x، كما هو مبين أدناه. (القيمة التي تظهر على الشاشة ((0 في الحالة أدناه)) ليست مهمة، بل هي مجرد أحدث قيمة لـ x كانت مستخدمة في الآلة الحاسبة).

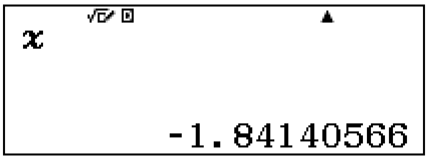
ادخل الاختيار الذي تتوقع أن يكون قريبا من الحل واضغط $\boxed{=}$. من أجل هذه المعادلة، يقترح الرسم البياني أعلاه أن هناك حلول قريبة من $x = 1$ و $x = -2$. عندما يجري إدخال 1، متبوعا بإشارة $\boxed{=}$، بعد بضع ثوان تقوم الآلة الحاسبة بإيجاد أول حل وذلك كما موضح في الأسفل يسارا. قم بالنقر على $\boxed{=}$ مرة أخرى لإدخال قيمة ابتدائية أخرى من أجل البحث عن حل. في هذه الحالة، تعد القيمة 2- خيارا جيدا. انقر على $\boxed{=}$ للحصول على الشاشة الثانية المبينة أدناه.

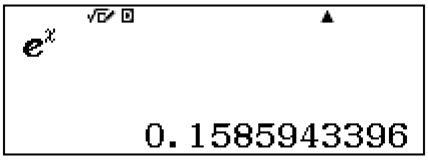


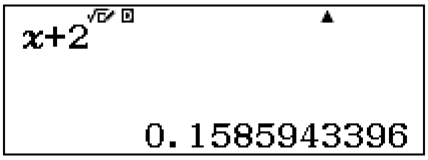


تعرض كل شاشة من هذه الشاشات حل للمعادلة معبر عنه بعدد الخانات المسموح بها في الشاشة $x \approx 1.146193221$ و $x \approx -1.84140566$. في كل حالة، يقوم التعبير L - R بإيجاد الفرق بين الطرفين الأيمن والأيسر للمعادلة، وفي كل حالة يشير إلى أن الطرفين متساويان على اعتبار أن $L - R = 0$ مع تقريب النتيجة بحسب قدرة الشاشة على العرض.

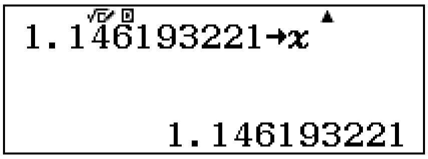
يمكنك التحقق من أي من هذه النتائج عبر إيجاد قيمة التعابير باستخدام الآلة الحاسبة. انقر على $\boxed{AC}$ للبدء. سيكون الحل الثاني أسهل للبدء على اعتبار أن الآلة الحاسبة قد قامت من قبل بتخزين أحدث قيمة لـ x في الذاكرة x والتي يمكنك استعادتها عبر الضغط على زر $\boxed{x}$ كما هو موضح أدناه:

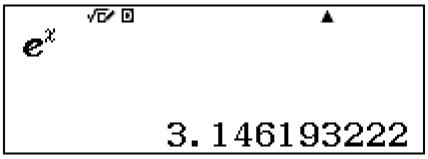


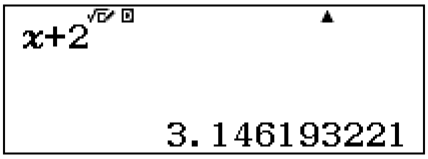




تعرض الشاشتين السابقتين أنه من أجل $x = -1.84140566$، سيكون لدينا $e^x = x + 2$. سيكون من الممل قليلا التحقق من الحل الأول وذلك لكون علينا إدخال قيمة x يدويا في البداية. من أجل تجنب إدخالها مرتين، يمكنك تخزينها في الذاكرة x أولا.



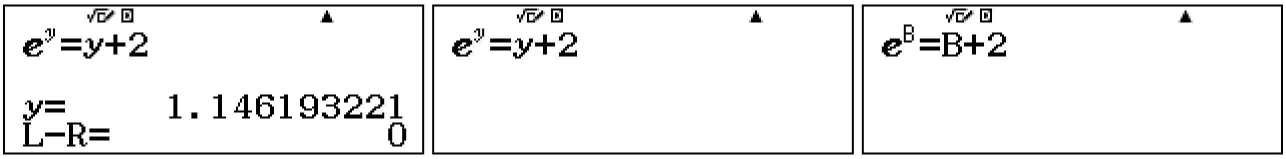




في هذه الحالة، تختلف القيم التقريبية فقط في الخانة العشرية الأخيرة (لأن القيمة المستخدمة من أجل x هي فقط تقريب للحل الموجود من قبل ClassWiz). بالتالي سيكون من غير المرجح أن حل بأكثر من بضعة منازل عشرية سيكون مناسبا، ومع ذلك، حل تقريبي مثل $x \approx 1.1462$ و $x \approx -1.8414$ سيكونان كافيان من أجل معظم الأغراض العملية.

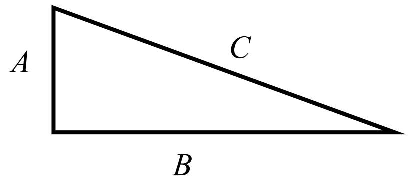
قد تتساءل ما الذي تقوم به الآلة الحاسبة من أجل حل المعادلة. إنها تستخدم عمليات مشابهة لتلك التي نستخدمها مع الجداول (التي تحدثنا عنها سابقا في هذه الوحدة) وذلك من أجل الحصول على تخمين والتحقق من النتيجة ومن ثم استخدام البيانات من أجل تحسين هذا التخمين... وتعاد هذه العملية بشكل متكرر. إلا أنه في الوقت ذاته، فإن قيام الآلة الحاسبة بهذه العملية يكون أسرع بمرات من الحساب اليدوي، بالطبع.

يمكن حل المعادلات لمتغيرات مختلفة عن x، قم بالتحقق بنفسك من أن حل هذه المعادلتين يعطي نفس القيم عند استخدام x كمتغير. ويظهر أحد الحلول من أجل y حيث لا يتغير معنى المعادلة بتغيير المتغير.



يمكن للأمر Solve في الآلة الحاسبة حل معادلة لمتغير واحد فقط. بالتالي في حالة أي معادلة تتضمن أكثر من متغير واحد، ستطلب منك الآلة الحاسبة إعطاء قيمة عددية لباقي المتغيرات قبل البحث عن حل.

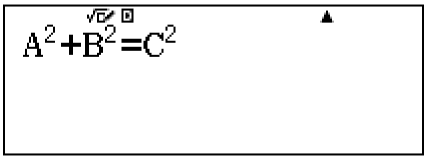
لنتأمل المثال الخاص بالتحديد طول الضلع (A) لمثلث قائم الزاوية، في حال كان كل من طول الوتر (C) والضلع القائم الآخر (B) معروفين.



تتحدد العلاقة بين هذه المتغيرات الثلاثة، A، B وC بعلاقة فيثاغورس:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

للعثور على قيمة A عندما B = 7 و 12= C، ادخل المعادلة في الآلة الحاسبة، ثم استخدم من جديد زري ALPHA CALC من أجل علامة يساوي.



الآن حل المعادلة باستخدام زري SHIFT CALC. عندما يظهر متغير ما، يمكنك تعيين قيمته باستخدام لوحة المفاتيح. إذا قمت بالنقر فوق = من دون تحديد قيمة، ستقوم الآلة الحاسبة بإيجاد حل لهذا المتغير. في هذه الحالة، تحتاج الآلة الحاسبة قيم كل من B و C من أجل إيجاد A. يمكنك استخدام المفاتيح ▲ و ▼ للتنقل بين المتغيرات. ادخل قيم المتغيرين الآخرين متبوعين بمفتاح =. أعط قيمة بدء مناسبة (إذا كنت تعتقد القيمة الظاهرة ليست مناسبة). بعد تعيين قيم B و C، انتقل إلى A وانقر على = من أجل حل المعادلة. سنحصل على الحل 9.75 ≈ A كما نرى في الأسفل.

تأكد من أن الآلة الحاسبة تبدأ بتخمين معقول للمتغير المطلوب. في هذه الحالة، على سبيل المثال، سيؤدي إعطاء قيمة سالبة كتخمين أولي لـ A إلى حل سلبي وهو أمر لا معنى له في سياق إيجاد أطوال أضلاع مثلث.

إذا كنت ترغب الآن في حل المزيد من معادلات علم المثلثات، لقيم أخرى من A، B و C، ابدأ عبر النقر على مفتاح = ومن ثم كرر العملية.

يعتبر استخدام Solve أمر مفيدا في حال أردت حل مجموعة من المعادلات من نفس النوع، مثل تلك التي تستخدم صيغة مماثلة.

النسبة والتناسب

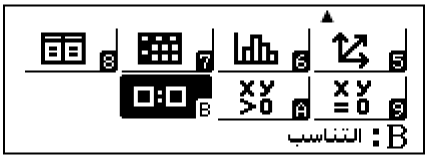
يتضمن أحد الأشكال الشائعة للمعادلة كميات تتناسب طرديا مع بعضها البعض. انظر، على سبيل المثال، إلى سيارة تسير بسرعة ثابتة. إذا كانت تقطع مسافة 28 كلم كل 20 دقيقة، كم من الوقت سوف يستغرق لقطع مسافة 45 كم؟ تكون نسبة المسافات المقطوعة هي نفسها نسبة الأوقات المستغرقة. بالتالي إذا كانت x تمثل الوقت المطلوب، يمكن القول بأنه يمكن الحصول على تناسب لهذه النسب بالشكل التالي:

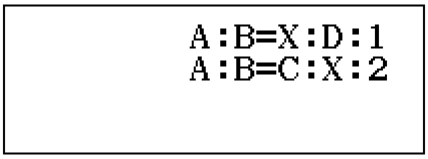
28:45 = 20:x

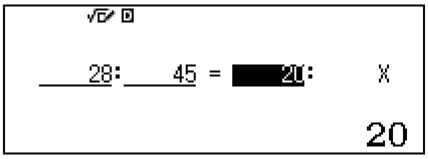
ويعتبر تناسب المسافات مساويا لتناسب الأزمنة. يمكنك أيضا كتابة هذه المعادلة باستخدام الكسور:

$$\frac{28}{45}=\frac{20}{x}$$

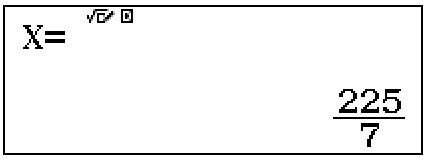
من أجل حل المعادلات من هذا القبيل، استخدم وضعية التناسب (عبر زري MENU B) كما هو مبين أدناه. اختر الشكل المناسب، في هذه الحالة 2، ثم ادخل القيم الثلاث المعنية، مع النقر على = بعد كل عملية إدخال كما هو مبين أدناه.

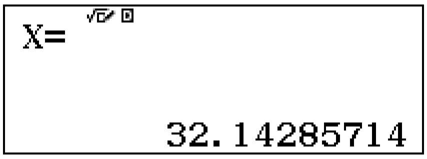






انقر على = للحصول على الإجابة والتي يمكن التعبير عنها بشكل عشري، وذلك باستخدام مفتاح S⇔D عند الرغبة. لاحظ أن الإجابة 32 دقيقة تبدو معقولة لهذه المسألة حيث من الطبيعي لسيارة أن تستغرق وقتا أطول لقطع 45 كم من الوقت اللازم لقطع 28 كيلومترا.





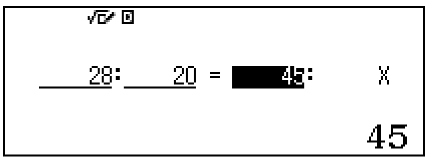
انقر على = من جديد لإدخال قيم مختلفة لحل نسبة أخرى من النوع نفسه. للانتقال إلى نسب من نوع آخر، اضغط OPTN وحدد النوع.

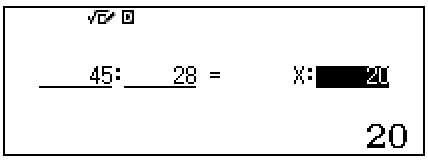
في هذه الحالة، قد تكون قد اخترت تمثيل التناسب الطردي بطرق مختلفة. على سبيل المثال، فإن المعادلات التالية ستكون بدائل، معروضة كنسب أو كسور.

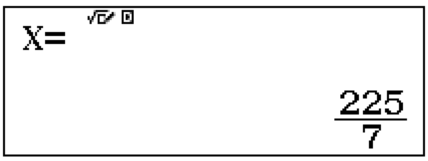
28:20 = 45: x   45:28 = x:20

$$\frac{28}{20}=\frac{45}{x} \qquad \frac{45}{28}=\frac{x}{20}$$

كل ما سبق هي تمثيلات مكافئة، حيث تعرض النسبة الأولى المسافة إلى الزمن (ويعني السرعة) والتي هي ثابتة، بينما تعرض الثانية كيف أن نسب المسافات والأزمنة ثابتة ولكن يجري التعبير عنها بشكل مختلف عن قبل، في وضعية التناسب، أختر 1 . كما يمكنك أن ترى عبر حلها في وضعية التناسب، يكون حل x هو نفسه في كل من الحالات الثلاث.







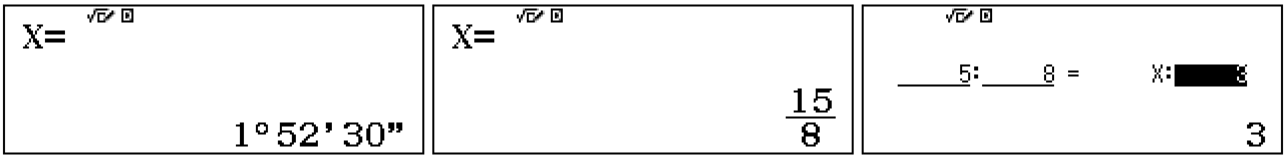
بعض العلاقات تتناسب عكسيا، أي بشكل غير مباشر، بالتالي يجب الاهتمام بشكل كبير بكتابة هذه النسب. من الأمثلة النموذجية على هذا الأمر المثال التالي:

تستغرق خمس نساء مدة ثلاث ساعات لبناء جدار. كم ستستغرق ثماني نساء لبناء نفس النوع من الجدار؟

في هذه الحالة، سيؤدي زيادة عدد النساء إلى تقليل الوقت اللازم، بالتالي فإن معادلات النسبة الخاصة بإيجاد الزمن x ستكون بالشكل:

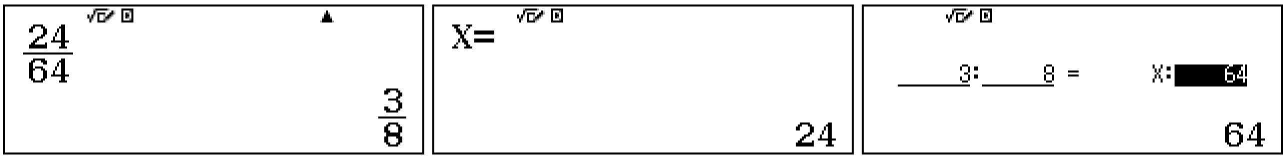
$$\frac{5}{8} = \frac{x}{3} \quad \text{أو} \quad 5:8 = x:3$$

إن الحل متاح في وضعية التناسب كما هو الحال من قبل:



لقد جرى تحويل النتيجة هنا إلى ساعات ودقائق وثواني (باستخدام مفتاح °’”) وذلك على الرغم من أن مثل هذه الدقة ليست مطلوبة حقا في هذا السياق. الأهم من ذلك، لاحظ أن الجواب منطقي هنا: تتوقع استغراق ثماني نساء وقتا أقل من خمس لإتمام نفس العمل؛ بالتالي يبدو أقل من ساعتين حلا معقولا هنا.

يمكن استخدام وضعية التناسب لأغراض أخرى مثل فهم العلاقات. على سبيل المثال، لنفترض أنك أردت تمثيل جزء من كسر بمقام مختلف. على سبيل المثال، ماهو الكسر الذي مقامه 64 يكافئ لثلاثة أثمان؟ يمكن تمثيل هذا المسألة بالنسبة 3:8 = x:64 وحلها باستخدام ClassWiz.



يمكن التحقق من أن النتيجة x = 24 بسهولة في نمط الحساب عن طريق إدخال الكسر 24/64 الأمر الذي سيجعل الآلة الحاسبة تقدمه بالشكل 3/8 وهو متوافق مع النتيجة أعلاه. بالطبع، يتوقع منك أن تكون قادرا على إجراء تحويلات من هذه الأنواع عقليا وهو الأمر الذي يعتبر أكثر كفاءة.

تمارين

إن الهدف الأساسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. استخدم SOLVE من أجل حل $6x + 19 = 46$.

2. أ) استخدم وضعية المعادلة من أجل حل $x^2 - 7 = x$. قدم الحل لأقرب منزلتين عشريتين.

ب) استخدم وضعية المتباينات من أجل حل $5x + 6 \geq x^2$.

3. حل النظام الخطي التالي:

$$x + 2y = 8$$
$$3x - y = -11$$

ب) حل النظام الخطي التالي:

$$2a + b = 13$$
$$b - 2a = 1$$

4. حل النظام الخطي التالي:

$$2x + y + z = 3$$
$$x = 4y + z$$
$$z + 5 = x + y$$

5. أ) أوجد جذور الدالة $f(x) = x^3 - 2x - 1$

ب) استخدم الإجابة من أ) من أجل إيجاد حلول لـ $x^3 - 1 = 2x$.

ت) أوجد $x^3 < 2x + 1$.

6. أ) قم بعمل جدول قيم من أجل $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ بين $x = -10$ و$x = 10$.

ب) استخدم الجدول من أجل إيجاد$f(7)$، قيمة الدالة عندما تكون$x = 7$.

ت) استخدم الجدول لإيجاد قيمة x عندما $f(x) = -16$.

7. قم بالنظر للدالة $f(x) = x^3 - 2x + 1$. هناك حل للمعادلة $x^3 - 2x + 1 = 0$ بين $x = 0.6$ و$x = 0.7$. استخدم الجدول من أجل إيجاد قيمة x لأقرب منزلتين عشريتين.

8. أوجد حل $2^x = x + 2$.

9. استخدم جدول القيم من أجل تحديد عدد الحلول الممكنة من أجل المعادلة $x + 2^x = 5$. ومن ثم أوجد الحل لأقرب أربع منازل عشرية في الفترة $1 < x < 2$.

10. قم بحل $3x^2 + 5 = 0$، ثم فسر لم كلا الجذرين هما عددان مركبان.

11. أوجد الحلول الحقيقية (إن وجدت) للمعادلة: $x^2 + 2x + 2 = 3 - x^4$.

12. قم بالنظر للصيغة التالية، والتي تعرض تعداد السكان y لبلد ما بعد سنوات مقدارها B بنسبة نمو سكان سنوية هي x%، مع البدء بتعداد السكان الحالي A.

$$y = A\left(1 + \frac{x}{100}\right)^B$$

أ) أدخل المعادلة في الآلة الحاسبة واستخدم solve من أجل إيجاد ما هو معدل النمو السكاني لبلد فيه تعداد السكان الحالي هو 60 مليون نسمة وسوف يصل إلى 90 مليون نسمة خلال 10 سنوات.

ب) قم بتحرير المعادلة واستخدام Solve من أجل معرفة عدد السنوات اللازم مع نسبة نمو ثابتة 2% من أجل وصول بلد عدد سكانه 45 مليون إلى 70 مليون.

13. حل أ) $5:11 = x:6$ و ب) $\frac{13}{4}=\frac{5}{a}$

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا

1. حجم مخروط معطى بالعلاقة $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع المخروط.

أ) احسب الحجم في حال كانت r = 2.5 سم و h = 8 سم.

ب) احسب الارتفاع إذا كان الحجم 30 سم^3 ونصف القطر 2.3 سم.

ت) احسب نصف القطر في حال كان الحجم 24 سم^3 والارتفاع 10 سم.

2. فسر لماذا لا يوجد أي حل للنظم الخطي:

3x – y = 7
6x – 14 = 2y

هل يمكنك إيجاد بعض الأنظمة الخطية الأخرى التي لا يوجد حل لها؟ تحقق من ذلك بالآلة الحاسبة.

3. جرى رمي كرة في الهواء من منصة حيث وصلت إلى ارتفاع h، خلال x ثانية، معطى بالعلاقة:

$h(x) = 5x + 7 – 4.9x^2$

أ) استخدم الجدول لإيجاد ارتفاع الكره عندما تكون قيم x هي 0.5 و0.7 و 0.9 على التوالي.

ب) ما هو ارتفاع هذه المنصة؟

ت) متى ستضرب الكرة الأرض؟

ث) في أي اتجاه جرى رمي الكرة؟ لأعلى أم لأسفل؟

4. قم بالنظر إلى المعادلة التالية sin x = 0.4.

أ) أوجد الحل (الحلول) من أجل x في الفترة $0 \le x \le 360^o$.

ب) هل هناك أي حلول أخرى للمعادلة؟ تحقق منها.

5. استخدم الآلة الحاسبة من أجل إيجاد حلول المعادلة: $(x + 1)^2 – 2x = x^2 + 1$. فسر لماذا هناك العديد من الحلول الممكنة.

6. تحتوي المنظومة التالية من المعادلات على معاملات (اعتمادا على قياسات فيزيائية) قد جرى تقريبها إلى أقرب خانة عشرية واحدة:

2.4x + 5.7y = 4.2
3.4x + 8.3y = 3.2

بالتالي وعلى سبيل المثال، معامل 2.4 في المعادلة الأولى يمثل عددا في الفترة بين 2.35 إلى 2.45

قم بالتحقق من أثر هذا على حل المعادلات التي جرى استخدام فيها معاملات مقربة لخانة عشرية واحدة مثل تلك الموضحة في الأعلى (على سبيل المثال، جرب 2.37 و 2.42 بدلا من 2.4: كيف يمكن مقارنة هذه الحلول؟ علق على التطبيقات العملية الخاصة بملاحظتك.

إن نظم مثل هذه توصف على أنها سيئة التكيف(ill-conditioned).

ملاحظات من أجل المعلمين

قمنا في هذا الفصل باستخدام *ClassWiz* من أجل إستكشاف حل المعادلات عدديا. يمكن استخدام نمط الجدول من الحصول على تقريبات عددية للجذور والحلول. يسمح لنا نمط المعادلة/الدالة بالحصول على حلول لمعادلات كثيرات الحدود و أنظمة المعادلات الخطية حتى أربع متغيرات. أما نمط المتباينات فيعالج متباينات كثيرات الحدود بينما يعالج نمط التناسب التناسب الطردي والعكسي. يسمح لنا الأمر Solve بحل المعادلات اللاخطية والقواعد الرياضية بشكل ناجح. يجب على الطلاب قراءة هذه الوحدة حتى تساعدهم على رؤية كيفية استخدام هذه الآلة الحاسبة من أجل معاينة أنواع الدوال المختلفة. وبينما يجب على الطلاب القيام بالتمارين بأنفسهم، من الأفضل القيام بها مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة النتائج معا والتعلم من بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1) $x = 4.5$ ب) $a = 27/5, b = 11/5$.

2. a) 2.19-, 3.19 b) -1 ≤ x ≤ 6

3. أ) $x = -2, y = 5$.

4. $x = 23/15, y = 1/5, z = -4/15$

5. أ) 1-، 0.618-، 1.618

ب) $x = -1$، 0.618- أو1.618

ت) x < -1 ، -0.618 < x < 1.618 ،-

6. b) 290 c) 2-

7. رسم جدول بقيم بين 0.61 و0.62 ومن ثم بين 0.618 و0.619 وذلك من أجل رؤية حل لـ $x \approx 0.62$ إلى أقرب منزلتين عشريتين.

8. 1.69- ، 2

9. فقط حل واحد هو $x \approx 1.7156$

10. $x \approx \pm 1.29i$ الحلول هنا مركبة لأن المعادلة $3x^2 = -5$ لا تملك حلول حقيقية على اعتبار أن $3x^2$ هي دوما موجبة.

11. $x \approx -1.1841, 0.4047$

12. أ) 4.14% ب) 28.3 سنة

13. أ) 30/11 ب) 20/13

الأنشطة

1. يمكن حل الجزأين أ) و ت) عن طريق استخدام أمر Solve وذلك بالرغم من حاجة الطلاب لكتابة الصيغة بمتغيرات الآلة الحاسبة المناسبة من أجل كل من V وr وh. لاحظ في القسم ب) كيف أن هذه الطريقة تتجنب حاجة الطلاب إلى تبديل المعادلة جبريا الأمر، الذي يعد صعبا [الأجوبة: أ)52.36 ب)5.42 ت)1.51]

2. يجب تشجيع الطلاب على استخدام نمط المعادلة/الدالة في البداية من أجل رؤية رسالة الخطأ التي ستنتج بأنفسهم. إن كلتا المعادلتين معتمدتان على بعضهما حيث تعتبر معاملات المعادلة الثانية ضعف معاملات المعادلة الأولى، بالتالي لا تقدم المعادلة الثانية أية معلومات إضافية. في حال جرى رسم منحنى بياني لهما، تعطينا المعادلتين مستقيم واحد فقط. يجب على الطلاب أن يكونوا قادرين على إعطاء أمثلة إضافية بنفس الطريقة، واحدة ضعف الأخرى، ومن ثم التحقق من أنه لا يمكن حلها باستخدام الآلة الحاسبة.

3. يتطلب هذا النشاط استخدام جدول من أجل استكشاف حالة تطبيقية. بالرغم من أنه قد يكون من الممكن النظر له على أنه نشاط استكشاف دالة، فإن الإجابة على معظم الأسئلة يكافئ حل معادلة. قد يكون من الممارسة الجيدة الطلب من الطلاب كتابة المعادلات التي يقومون بحلها بنجاح، حساب قيمة الدالة.
[الإجابات أ) 8.275، 8.099، 7.531 ب)7 م ت)عندما $h(x) = 0$، فإن $x \approx 1.8097$ د) صعودا

4. تملك المعادلة عددا لانهائيا من الحلول. يجب على الطلاب هنا النظر للأنماط في تلك الحلول حيث سيحتاجون لتعديل قيم البداية x من أجل رؤية القيم التالية. سيساعد رسم منحنى بياني للدالتين f(x) = sin x و g(x) = 0.4 على رؤية كيف تظهر هذه الأنماط ولم تظهر [الإجابات: 23.5781° و156.4218°].

5. يهتم هذا النشط بفكرة المتطابقة والتي تملك عدد لانهائي من الحلول وذلك بالرغم من أنه من غير الشائع وصف المتطابقة على أنها نوع من أنواع المعادلات. مهما كانت قيمة X التي يبدأ بها الطلاب باستخدام أمر Solve، سيكون الحل الناتج من قبل الآلة الحاسبة [يجب تذكير الطلاب أن إشارة = تملك معاني متعددة في الرياضيات].

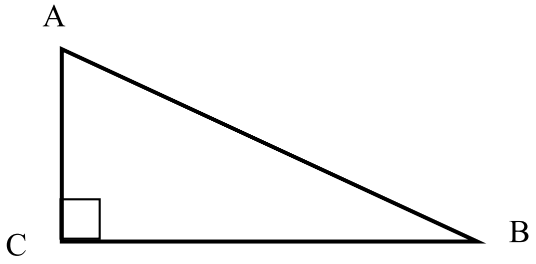
6. هدف هذا النشاط هو تشجيع الطلاب على تقدير الحاجة للتفكير تجاه المعادلات بدل من محاولة حلها بشكل ميكانيكي. تقود تغييرات صغيرة في المعاملات إلى تغييرات كبيرة في الحلول. لو كانت هذه التغييرات كنتيجة لأخطاء قياس، كما هو مقترح في النشاط، يجب أخذ الحيطة في تأويلها. لو كانت آلية الرسم متوفرة، يمكن رؤية الخطين المرتبطين بهاتين المعادلتين وكأنهما متوازيان.

الوحدة الخامسة
علم المثلثات

تعد الآلة الحاسبة أداة مفيدة في الكثير من جوانب علم المثلثات، وذلك من أجل حل المسائل التي تتضمن القياس وفهم العلاقات بين زوايا المثلث. لنبدأ بالتحقق من أن آلتك الحاسبة تستخدم الدرجات (من خلال النظر إلى رمز D صغير موجود على الشاشة). استخدم SETUP (الإعدادات) لتغييره إذا لزم الأمر. ضع الآلة الحاسبة في وضع العمليات الحسابية من خلال النقر على MENU 1 .

علم المثلثات والمثلثات القائمة

تعتمد تعاريف الدوال المثلثية على المثلثات القائمة، مثل المثلث الموضح أدناه، والذي فيه C هي الزاوية القائمة.



من أجل هذا المثلث، فإن $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$، $\cos B = \dfrac{BC}{AB}$، $\tan B = \dfrac{AC}{BC}$

إضافة إلى ذلك، وعلى اعتبار أن المثلث قائم الزاوية، تسمح لنا نظرية فيثاغورس برؤية العلاقة بين أطوال الجانبين (AC وBC) والوتر (AB) بالشكل:

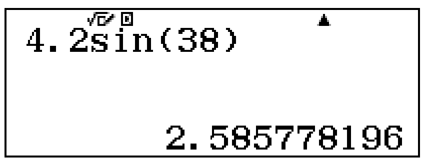
$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

تسمح لنا هذه العلاقات بتحديد كافة الأضلاع والزوايا لمثلث قائم الزاوية، حتى عندما تكون فقط بعضا منها معلوما.

على سبيل المثال، إذا علمنا أن زاوية B هي 38^{o} وأن $AB = 4.2$ m، يمكننا العثور على طول AC باستخدام معادلة sin B (جا B أو الجيب) أعلاه:

$\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC}{4.2}$، بالتالي $AC = 4.2 \sin B$.

يتم تنفيذ مثل هذه العمليات الحسابية بسهولة على الآلة الحاسبة، حيث يعتبر من الممارسة الجيدة وضع أقواس بعد قياس الزاوية، حتى لو كانت الآلة الحاسبة تقوم بالحسابات بشكل صحيح من دونها.



لاحظ أنه ليس من الضروري استخدام علامة الضرب في هذه الحالة لإيجاد $AC \approx 2.59$ m .

تعرض الشاشة في الأعلى كيف أن الآلة الحاسبة تعطي النتيجة بخانات عشرية كثيرة، لكن يجب الإهتمام في تحديد مستوى دقة العمليات الحسابية هذه. على اعتبار أن القياس الأصلي لـ AB، والمستخدم في الحساب، يحتوي على منزلة عشرية واحدة فقط. بالتالي سيكون من الأفضل تقريب الإجابة إلى منزلة عشرية واحدة لـ AC بحيث يكون لدينا: $AC \approx 2.6$ m.

من أجل إيجاد طول الجانب الآخر BC، يمكننا استخدام عملية مماثلة، وذلك عن طريق معادلة cos B (جتا B أو جيب التمام). بدلا من ذلك، يمكن استخدام نظرية فيثاغورس في معرفة كيف أن

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

بالتالي $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

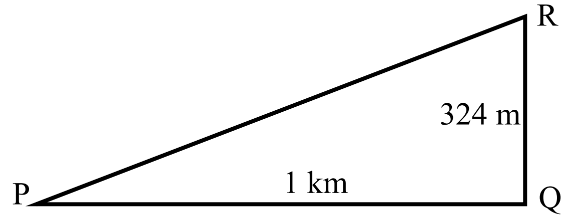
ويمكن تحديده بسهولة من خلال نتيجة الآلة الحاسبة أعلاه (والتي تعطي AC) على النحو التالي:

```
√(4.2²−Ans²)
                3.309645165
```

بالتالي سيكون لدينا BC ≈ 3.3 m. لاحظ أنه لم يكن من الضروري تسجيل أي نتائج متوسطة هنا، كما أنه لم يكن من الضروري استخدام التقريب (مثل AC ≈ 2.6)، الأمر الذي قد يؤدي إلى أخطاء صغيرة. بشكل عام، من الأفضل عدم تقريب النتائج حتى الوصول للخطوة الأخيرة في أي حسابات تجري على الآلات الحاسبة أو أجهزة الكمبيوتر. في هذه الحالة، سيؤدي استخدام التقريب لـ AC لنتائج مختلفة (قليلا) وأقل دقة لـ BC:

```
√(4.2²−2.6²)
                  3.2984845
```

ويمكن أيضا استخدام الآلة الحاسبة في تحديد زوايا مثلث قائم الزاوية، وذلك باستخدام العلاقات المثلثية العكسية. على سبيل المثال يمكن الوصول لمقلوب الظل عبر الضغط على SHIFT tan ($\tan^{-1}$). إذا كنت تعرف الارتفاع العمودي والمسافة، يمكنك استخدام هذا لإيجاد زاوية الارتفاع. في الرسم البياني أدناه. تمثل QR ارتفاع برج إيفل في باريس حيث ارتفاع البرج هو 324 مترا. أما P فهي نقطة تبعد كيلومتر واحد من قاعدة البرج. قيست على مستوى سطح الأرض. ما هي زاوية الارتفاع من P إلى أعلى البرج؟



على اعتبار أن $\tan P = \dfrac{RQ}{PQ}$،

تكون الزاوية $P = \tan^{-1}\dfrac{RQ}{PQ}$.

ستعطي الآلة الحاسبة النتيجة باستخدام الدرجات العشرية، كما هو مبين أدناه على اليسار.

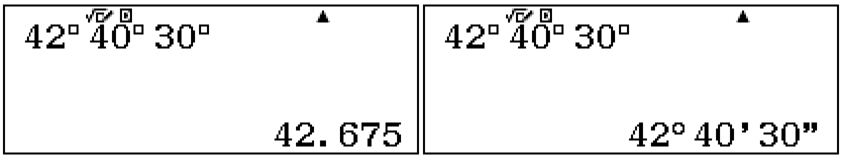
```
tan⁻¹(324/1000)
                17.95232431
```

```
tan⁻¹(324/1000)
                17°57'8.37"
```


لتمثيل هذه الزاوية باستخدام الدرجات والدقائق والثواني، اضغط على مفتاح °’” من أجل الحصول على النتيجة، كما هو مبين أعلاه على اليمين. مرة أخرى، لا بد من الحرص على التعبير عن النتيجة لأقرب دقة ممكنة. في هذه الحالة، وعلى مسافة 1 كم من برج "إيفل"، تكون الزاوية من على سطح الأرض 18°.

عند استخدام الآلة الحاسبة لحساب المثلثات، من الضروري في بعض الأحيان إدخال الزوايا بالدرجات والدقائق والثواني، مع العلم، أن الآلة تعمل بالدرجات العشرية. لمعرفة العلاقة بين هاتين الطريقتين من استخدام الستيني (sexagesimal)، أدخل الزاوية بالدرجات والدقائق (وربما الثواني أيضا)، ثم انقر = لرؤية نتيجة الزاوية بالدرجات العشرية.

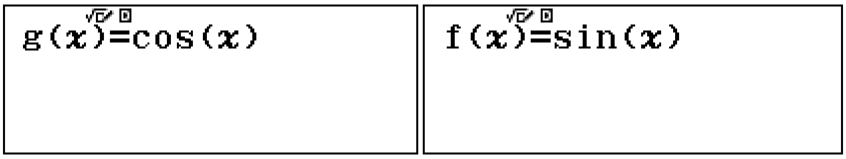
لإدخال الزاوية، اضغط على مفتاح °’” بعد إدخال كل من الدرجات والدقائق والثواني. وعلى الرغم من وجود رمز الدرجة في كل مرة، ستقوم الآلة الحاسبة بتأويل الزاوية بشكل صحيح وذلك كما يظهر في الشاشة الأولى بعد النقر على =. اضغط على مفتاح °’” لرؤية الزاوية بالدرجات العشرية.



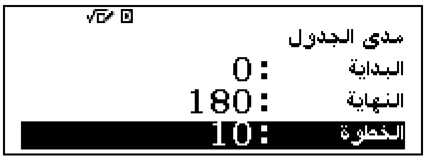
اضغط على مفتاح °’” مرة أخرى لمعرفة الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني.

جداول القيم

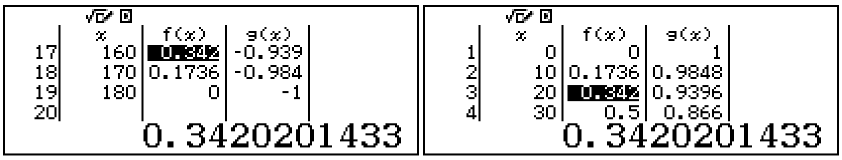
من المفيد دراسة جداول قيم الدوال المثلثية وذلك من أجل رؤية كيف تعتمد الدوال على الزاوية. للقيام بذلك، استخدم 8 MENU لاختيار نمط الجدول ثم أدخل الدوال المهمة لك مستخدما x على أنه المتغير (استخدم مفتاح x). في الشاشات أدناه، قمنا بالنظر لدوال sine (الجيب جا) و cosine (جيب التمام جتا) انقر على = بعد إدخال كل دالة.



ومع إمكانية إدخال 30 قيمة فقط، يعد الخيار الجيد للجدول البدء بـ $x = 0°$ والانتهاء بـ $x = 180°$ ، مع خطوة مقدارها 10°. (هنا، لا يجري استخدام رموز الدرجة) اضغط = بعد إدخال كل قيمة.



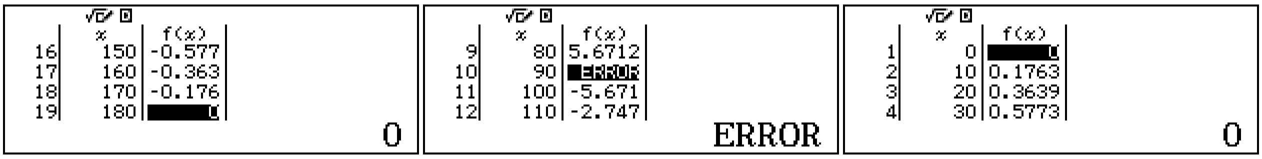
استخدم مفاتيح المؤشر للتنقل عبر الجدول مع عرض sine و cosine الزاوية في العمودين الأخيرين. لاحظ كيف أن قيم sine تتزايد لتصل إلى القيمة العظمى 1 من 0° إلى 90° ومن ثم تتناقص لـ 0 من جديد عند 180°. أما قيم cosine بدورها فتعرض نمطا مختلفا عن نمط جيب. ستسمح لك هذه الجداول بعملية رسم منحنى بياني لكل دالة بشكل سريع الأمر الذي سيساعدك على توضيح العلاقات المعنية.



تحقق أيضا من أن الزوايا التي هي على نفس المسافة من 0° و 180° تملك نفس قيمة sine، وذلك كما هو موضح أعلاه للزاويتين لـ 20° و 160°. توضح هذا العلاقة العامة حيث $\sin x = \sin (180° – x)$. أيضا، تكون العلاقة مختلفة في حالة cosine حيث نرى $\cos x = - \cos (180° – x)$.

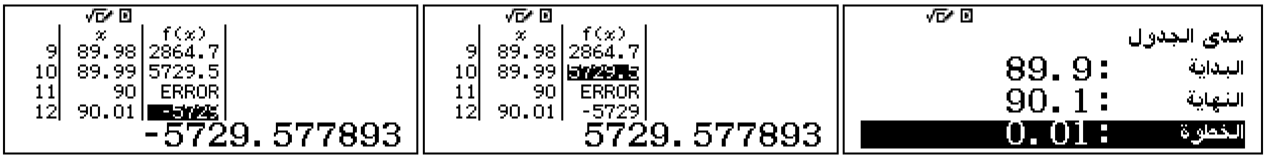
يمكنك أيضا حساب قيم sin x و cos x في الفترة $180^o \le x \le 360^o$ وملاحظة العلاقات الأخرى. تذكر أن الآلة الحاسبة لديها فقط إمكانية إستيعاب 30 صفا في الجدول، بالتالي يجب اختيار خطوة مختلفة في الجدول الثاني (مثل 15^o).

بينما تملك كل من دالتي sin x و cos x علاقات خاصة مرتبطة بعضها ببعض، تتبع دالة tan (الظل) نمطا مختلفا. لاستكشاف هذه، علينا أولا بإنشاء جدول قيم من أجل f(x) = tan x من 0^o إلى 180^o بخطوة هي 10^o. (انقر فقط على ☰ بدلا من تعريف الدالة الثانية وذلك من أجل إنشاء جدول بدالة واحدة). يجري عرض أجزاء من هذا الجدول في الأسفل.

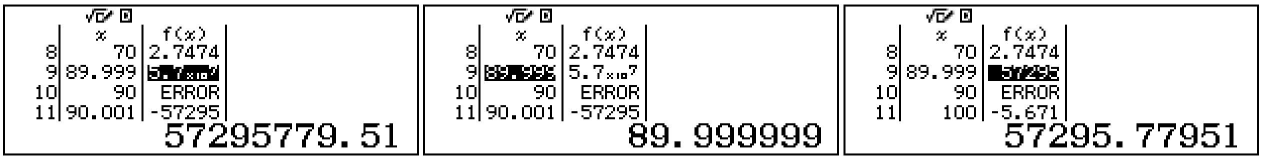


ولكونه لا يوجد هناك قيمة محددة من أجل tan لـ 90^o، ستعرض الآلة الحاسبة حالة خطأ (ERROR)هنا.

من أجل المعاينة عن قرب لسلوك الدالة بالقرب من الزاوية 90^o، قم بإنشاء جدول قيم للدالة قريب من الزاوية 90^o حيث هناك طريقتان للقيام بذلك. في الشاشات أدناه، تم تغيير الخطوة إلى 0.01، وتغيير نطاق الجدول للتأكد من أنه جرى الحصول على 30 قيمة.



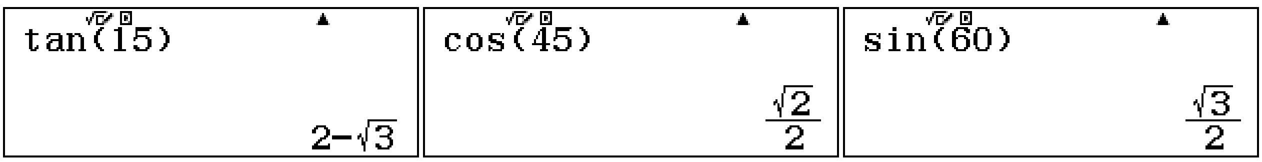
الطريقة البديلة هي في تغيير قيمة x عبر تظليلها ومن ثم إدخال قيم جديدة متبوعة بـ ☰ حيث تتغير القيم المجدولة وفقا لذلك. تعرض الشاشة في الأدنى بعض الأمثلة على ذلك مع البدء بالجدول الأصلي. لاحظ في الشاشتين الأخيرتين كيف أنه يمكن إدخال وعرض القيم التي تتجاوز شاشة عرض الجدول.



يمكنك أن ترى من هذه الجداول كيف أن هناك انقطاع في $x = 90^o$ وذلك في المنطقة التي تقوم فيها دالة الظل بتغيير الإشارة من قيمة موجبة كبيرة إلى قيمة سالبة كبيرة. ستساعدك هذه الجداول أيضا على تصور شكل منحنى دالة الظل من 0^o إلى 180^o.

القيم الدقيقة

على الرغم من أن التطبيقات العملية تتضمن دائما تقريبات (على اعتبار أنه لا يوجد قياس دقيق بالمطلق)، من المثير للاهتمام دراسة القيم الدقيقة لبعض العلاقات المثلثية. ربما قد لاحظت أن الآلة الحاسبة توفر بعض هذه الأمور، ثلاثة منها مبينة أدناه.

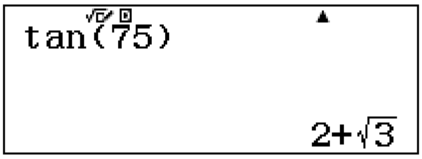


من الممكن في كثير من الأحيان رؤية مصدر هذه القيم وذلك من خلال رسم المثلثات المناسبة. على سبيل المثال، يتضمن مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية زاويتان 45^o، في حين تكون زوايا مثلث متساوي الأضلاع هي 60^o.

إضافة إلى ذلك، يمكنك استخدام هذه وغيرها من القيم الدقيقة للعثور على القيم الحقيقية للجيب و جيب التمام والظل لزوايا أخرى، وذلك باستخدام صيغ مختلفة لمجموع الزوايا. للتوضيح، انظر لصيغة ظل (Tangent) مجموع الزاويتين هاتين:

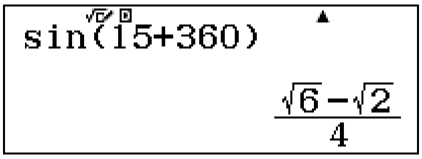
$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

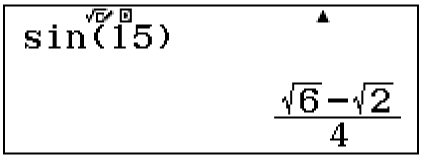
يمكنك استخدام القيم الدقيقة الخاصة بـ $\tan 45^o = 1$ و $\tan 30^o = 1/\sqrt{3}$ لحساب ظل $\tan 75^o$ بنفسك. يجب أن تكون قادرا على الحصول على نفس النتيجة بالضبط كما الحاسبة وذلك كما هو موضح أدناه.

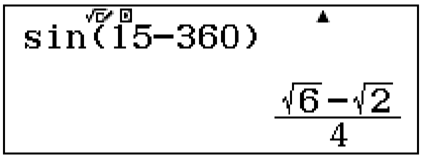


قم بتجربة هذه الطريقة مع عمليات جمع وطرح أخرى للجيب (sine) وجيب التمام (cosine) والظل (tangent) لدرجات زاوية أخرى.

ستساعدك الآلة الحاسبة أيضا على معرفة كيف تتكرر القيم المثلثية. على سبيل المثال، تعرض الشاشات أدناه كيف تتكرر قيم دالة الجيب (sine) كل 360^o تم.



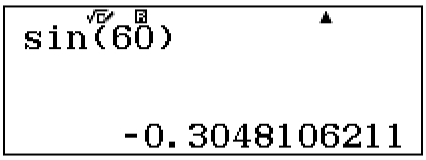


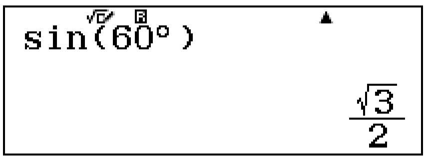


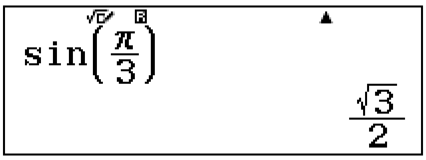
قياس الراديان

يوفر قياس راديان طريقة مختلفة لقياس الزوايا بدلا من استخدام الدرجات، وذلك عن عن طريق قياس طول القوس في الدائرة. نقول عن زاوية بأن قياسها 1 راديان في حال كانت تقطع قوسا في دائرة طول نصف قطرها 1. وبما أن محيط دائرة نصف قطرها 1 هو 2π، فإن قياس دوران الدائرة بالكامل هو 2π (راديان)، وهي تساوي 360^o بالدرجات (أو بقياس النظام الستيني).

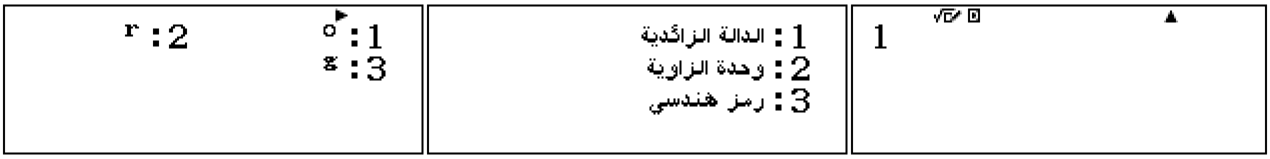
إذا كنت تستخدم الراديان في القياس أغلب الوقت، فمن الأفضل استخدام SET UP للتحويل من درجة لراديان حيث سترى حرف R صغير في شاشة العرض لتذكيرك بالإعدادات الجديدة حالما يتم ذلك. لاحظ في الشاشات الموجودة في الأدنى كيف جرى هذا بحيث يكون الحل الأول صحيح. أما في الحل الثاني، من أجل $\sin 60^o$، فقد جرى إضافة رمز الدرجة (باستخدام وحدة الزوايا OPTN 2) وذلك من أجل تجاوز وضع الراديان مؤقتا. أما الشاشة الثالثة فتعرض كيف أن الآلة الحاسبة ستفترض بأن القياس سيكون بالراديان عندما يجري تعيينها بالراديان، وتعرض جيب (sine) 60 راديان.



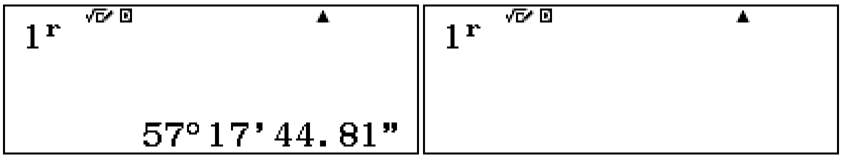




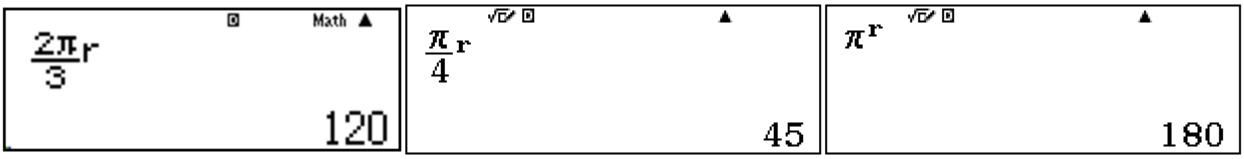
يمكنك تحويل قياس زاوية من راديان إلى درجات عندما يجري ضبط الآلة الحاسبة لكي تستخدم الدرجات. ابدأ بإدخال قياس الزاوية، ثم عبر استخدام القائمة OPTN ، اضغط 2 لاختيار وحدة الزاوية ثم 2 مرة أخرى للإشارة إلى أن القياس سيكون بالراديان. وتعرض الشاشات في الأسفل عملية تحويل 1 راديان إلى درجات.



انقر على ⊟ لإنهاء عملية التحويل. لاحظ في الأسفل كيفية استخدام ⁰'" لاستكمال التحويل من الدرجات العشرية إلى درجات ودقائق وثواني حيث نرى أنه من الواضح أن 1 راديان تساوي ما يزيد قليلا عن 57°.

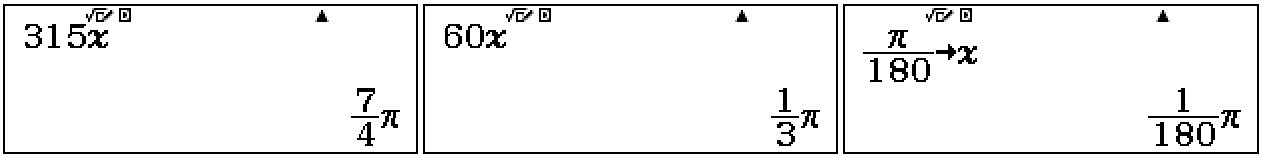


وتعرض الشاشات في الأسفل قيم مهمة أخرى وذلك باستخدام مفتاح (π) x10x SHIFT.

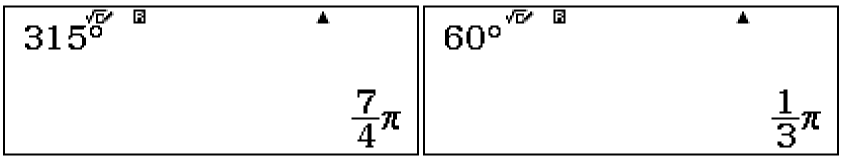


يمكن إجراء التحويلات من الدرجات إلى الراديان بشكل مباشر عبر ضرب الرقم بـ $\frac{\pi}{180}$.

يمكنك القيام بهذا التحويل عبر تخزين المضروب فيه في ذاكرة متغيرة (باستخدام STO) ثم ضربها بالمتغير كلما كانت هناك حاجة للتحويل حيث تظهر على الشاشة أدناه هذه العملية. (بطبيعة الحال، عليك أن تتذكر أن المضروب فيه قد جرى تخزينه في الذاكرة x).



لكن، إذا كان قد جرى وضع الآلة الحاسبة بالفعل في نمط راديان في الإعدادات SETUP ، يمكن بعد ذلك استخدام عملية مماثلة على النحو الوارد أعلاه: ادخل الزاوية واستخدم القائمة OPTN للإشارة إلى أنه يجري القياس بالدرجات. تعرض الشاشتين في الأسفل مثالين. (لاحظ وجود حرف R صغير في شاشة العرض المشير لوضع راديان).



مقياس غرادين

جرى اختراع فكرة مقياس غرادين من أجل توفير طريقة لقياس زوايا تكون متوافقة مع النظام المتري (والتي تعتمد على الأس/القوى ومضاعفات 10 لكل من القياس والأرقام). لم يعد يستخدم حاليا بشكل واسع ما عدا في الحالات المتعلقة بالمسح. هناك 100 غرادين في زاوية قائمة؛ بالتالي هناك 400 غرادين في دائرة كاملة. يمكنك استخدام عمليات مماثلة على النحو الوارد أعلاه للتحويل بين المقاييس.

على سبيل المثال، وكما نرى في الشاشات أدناه، لاحظ كيف جرى تعيين الآلة الحاسبة في نمط الدرجات (لاحظ رمز D الصغير فوق) حيث سنرى مكافئات بعض القياسات بالغرادين كما هو مبين.

200^{g} → 180	50^{g} → 45

تنطبق نفس القيم والعلاقات على الدوال المثلثية وذلك بغض النظر عن الطريقة التي يتم بها قياس زاوية كما يوضح المثال التالي. في كل حالة، يجري تحديد جيب (sine) نفس الزاوية مع استخدام قياسات مختلفة.

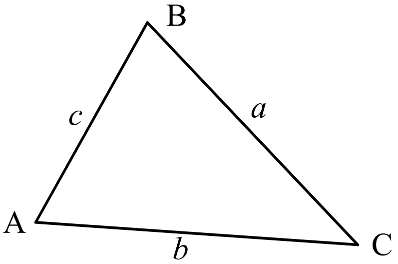
$\sin(50^{g})$ → $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}^{r}\right)$ → $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(45)$ → $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل المثلثات مع قانون الجيب (sine Law)

في بداية هذه الوحدة، وصفنا استخدام حساب المثلثات مع المثلثات قائمة الزاوية. ومع ذلك، فإن معظم المثلثات ليست مثلثات قائمة الزاوية، بالتالي يعتبر من المفيد جدا استخدام علم المثلثات مع المثلثات الأخرى حيث يقوم "قانون الجيب" (Sine Rule) بالربط بين أطوال أضلاع أي مثلث مع جيوب (sines) الزوايا المتقابلة. لا يحتاج المثلث هنا إلى أن يكون قائم الزاوية من أجل استخدام القانون كما يمكن استخدام الراديان هنا أيضا.

في أي مثلث ABC طول أضلاعه a و b و c مقابلة للزوايا A و B و C على التوالي، قانون الجيب هو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{أو} \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



يمكن استخدام قانون الجيب (Sine Law) لحل المسائل التي تنطوي على الحالات المثلثية التالية: (أ) زاويتين وضلع واحد أو (ب) ضلعان وزاوية واحدة. وفيما يلي أمثلة على كل من هاتين الحالتين:

(أ) إذا كان AB = 12 cm ، و C = 39° و B = 58° ، يمكنك العثور على طول AC عن طريق:

$$\frac{b}{\sin 58^{o}}=\frac{12}{\sin 39^{o}} \qquad \text{بالتالي} \qquad b=\frac{12\sin 58^{o}}{\sin 39^{o}}$$

تسمح لك الآلة الحاسبة باستكمال هذه العملية الحسابية بخطوة واحدة:

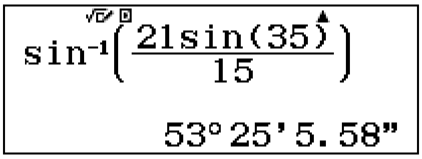
$$12\times\frac{\sin(58)}{\sin(39)} \quad 16.17074117$$

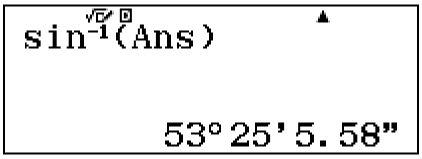
بالتالي، b = 16.2 cm مقربة إلى خانة عشرية واحدة.

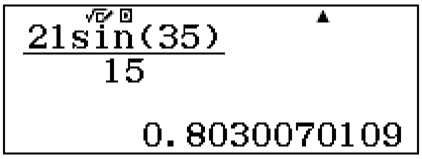
(ب) إذا كان AC = 21 cm ، و AB = 15 cmو C = 35° ، يمكنك العثور على قياس الزاوية B من خلال:

$$\frac{\sin B}{21}=\frac{\sin 35^{o}}{15} \qquad \text{بالتالي} \qquad \sin B=\frac{21\sin 35^{o}}{15} \qquad \text{وهكذا،} \qquad B=\sin^{-1}\left(\frac{21\sin 35^{0}}{15}\right)$$

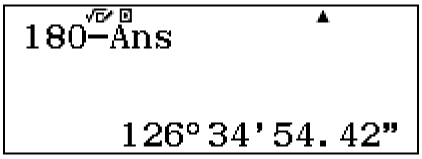
يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإكمال العملية الحسابية في خطوتين، أو في خطوة واحدة (كما هو موضح في الشاشة الثالثة أدناه):





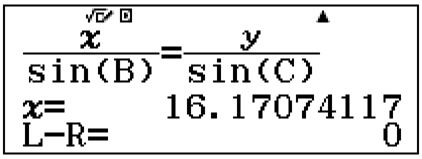


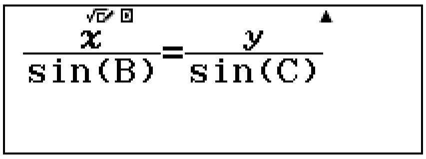
ومع ذلك، يجب أخذ الحيطة هنا! هناك نوعان من الحلول الممكنة للزاوية B. هناك زاويتان مختلفتان لديهما نفس الجيب (sine) 0.8030، بما ان الزاوية ومكملتها لهما نفس الجيب (كما هو موضح في هذه الوحدة سابقا). والاحتمال الآخر هو °53.42 – °180. لحساب هذا بكفاءة، يمكن طرح الزاوية التي جرى الحصول عليها من الزاوية °180، وذلك باستخدام مفتاح Ans على الفور، كما هو مبين أدناه:



بالتالي، يملك هذا المثلث المحدد زوايا °35، °53.42 و°91.58، أو يمكن أن يكون له زوايا °35 و°126.58 و°18.42. قم برسم بياني لرؤية هذا بنفسك. من دون المزيد من المعلومات عن المثلث، يكون لدينا نوعان من الحلول الممكنة. توصف هذه الحالة بأنها حالة مبهمة (ambiguous case). أحيانا يكون هناك ما يكفي من المعلومات لرفض واحد من الاحتمالات، وفي أحيان أخرى يقدم قانون الجيب (Sine Law) حلين للمثلث.

يمكنك استخدام Solve (الموصوفة في الوحدة 4) لحل المعادلات بكفاءة والتي من ضمنها قانون الجيب (Sine Law)، ولكن تحتاج إلى استخدام متغيرات مختلفة من أجل تمثيل أطوال الأضلاع (مع كون الآلة الحاسبة تملك عددا محدودا من المتغيرات المتاحة). في الشاشة أدناه، استخدمنا x من أجل طول ضلع b وy من أجل طول ضلع c.





قم بالنظر إلى المثال (أ) في الأعلى مرة أخرى. بعد النقر على SHIFT CALC لبدء تشغيل Solve، ستحتاج إلى إدخال القيم من أجل B وy وC ومن ثم البدء في حل x. سيكون حل $x \approx 16.2$ cm (مقرب لخانة عشرية واحدة) كما هو ظاهر.

حل المثلثات مع قانون جيب التمام (Cosine Law)

يعتبر قانون جيب التمام (Cosine Law) مفيدا من أجد إيجاد الزوايا وأطوال الأضلاع في المثلثات غير القائمة. إذا كانت كل من a و b و c هي أطوال أضلاع مثلث ABC، بالتالي:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

بإعادة ترتيبها من أجل إيجاد زاوية ما، يمكن إعادة كتابة قانون جيب التمام (Cosine Law) ليغدو بالشكل:

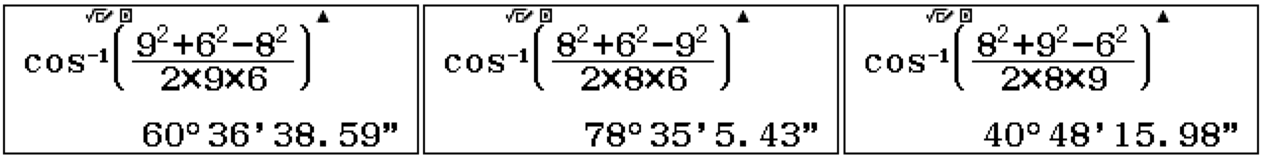
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

يمكن استخدام العلاقة الأولى في الآلة الحاسبة بكفاءة من أجل إيجاد طول أحد أضلاع المثلث عندما يكون ضلعي مثلث وزاوية بينهما معروفة. وبشكل بديل، إذا عرفت أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث، يمكن تحديد الزوايا بكفاءة باستخدام الصيغة الثانية.

على سبيل المثال، انظر لمثلث أطوال أضلاعه 6 و 8 و 9. قياس الزاوية المقابلة لأقصر ضلع (أي الذي طوله 6) يمكن تحديده من خلال النسخة الثانية قانون جيب التمام (Cosine Law):

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{8^2+9^2-6^2}{2\times8\times9}\right)$$

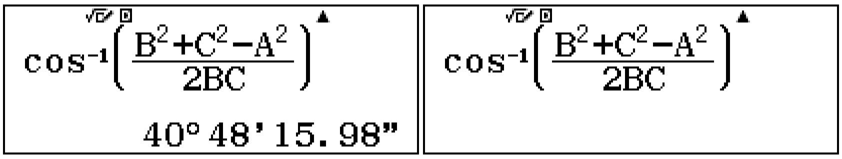
يمكن تحديد هذا بعملية حساب واحدة على الآلة الحاسبة كما تعرض الشاشة الأولى في الأسفل.



يمكن بعد ذلك إيجاد الزاويتين الأخيرتين عبر تحرير هذا التعبير (باستخدام زر ◄) وذلك كما هو موضح أعلاه:

يمكن أيضا تحديد الزاوية الثالثة من خلال طرح مجموع أول زاويتين من 180° وذلك على الرغم من أن هذا على الأرجح يعد أكثر صعوبة من تحرير التعبير. أيضا، يجب النظر في دقة معقولة هنا مع الأخذ في الاعتبار بأن أضلاع المثلث معطاة إلى أقرب عدد كلي. ربما ستكون الزوايا معطاة بالقياسات التالية تقريبا 41°، 78.5° و60.5° على التوالي.

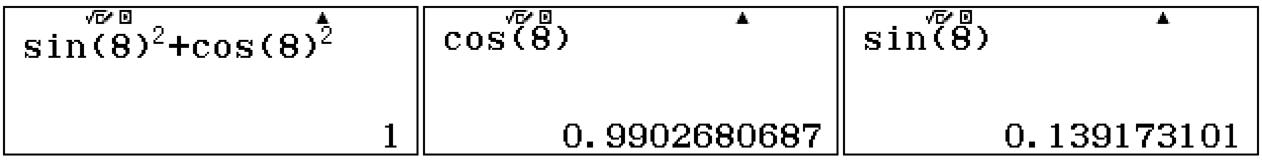
ويمكن أيضا استخدام صيغة قانون جيب التمام (Cosine Law) هذه بشكل فعال في الآلة الحاسبة باستخدام CALC حيث تعرض الشاشة الأولى في الأسفل صيغة إيجاد الزاوية A. بعد النقر على CALC وإدخال قيم A، B و C، سيتم الحصول على النتيجة كما هو موضح. لاحظ أنه جرى النقر على المفتاح ⋯ أيضا.



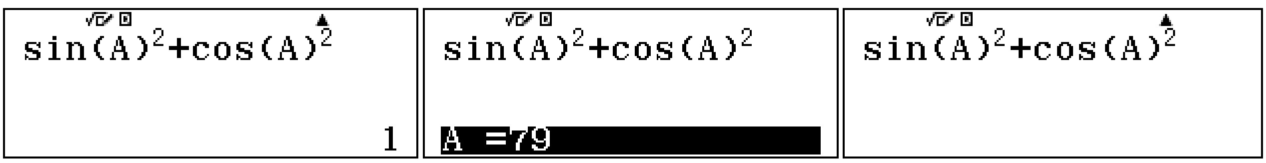
نظرية فيثاغورث (Pythagorean Identity)

هناك علاقة مهمة بين الجيب وجيب التمام لأي زاوية وتدعى "نظرية فيثاغورس" Pythagorean Identity حيث يجري التعبير عنها عادة بالشكل: $\sin^2A + \cos^2A = 1$

لأي زاوية A، فإن مربع الجيب زائد مربع جيب التمام يساويان 1. كن حذرا مع التعبير $\sin^2A$، والذي يعني $(\sin A)^2$. من أجل توضيح نظرية فيثاغورس لزاوية هي 8°، لاحظ في الشاشة الثالثة أدناه أنه، لكون الآلة الحاسبة لن تسمح بنقر مفتاح x^2 فورا بعد مفتاح sin ، يجب الضغط عليه بعد إغلاق أقواس كل حد.

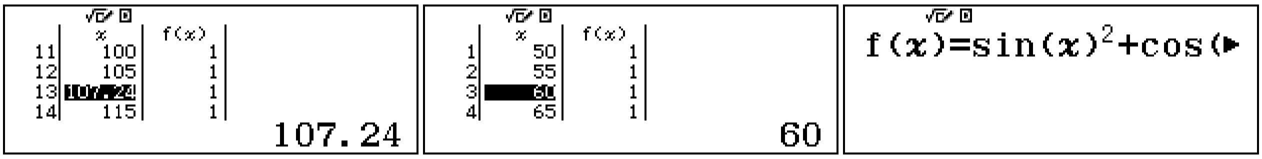


من أن أجل أن نرى كيف أن نظرية فيثاغورث دائما صحيحة (وهو الشرط اللازم لكي توصف عبارة ما بأنها "نظرية")، ادخل $\sin^2A + \cos^2A$ إلى الآلة الحاسبة واستخدم CALC عدة مرات للتأكد من بعض القيم لـ A وذلك كما هو مبين أدناه من أجل $A = 79°$.



تحقق من مجموعة قيم مختلفة (موجبة وسالبة وكبيرة وصغيرة) وتحقق مما يحدث إذا تم استخدام مقياس زاوية مختلف بدلا من الدرجة. سترى كيف أن هذه المتطابقة القوية تعبر عن علاقة هي دائما صحيحة.

وهناك طريقة أخرى لمعرفة ذلك عبر تكوين جدول قيم حيث يبين كيف أن $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ تملك دوما قيمة 1، وذلك بغض النظر عن x:



وبشكل أكثر أهمية، تسمح لك علاقة فيثاغورس بتحديد نسبة واحدة لزاوية ما، إذا كنت تعرف الأخرى. على سبيل المثال،

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} \quad \text{و} \quad \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$$

تأكد من أن هذه العلاقات صحيحة من خلال حسابها لبعض الزوايا باستخدام الآلة الحاسبة.

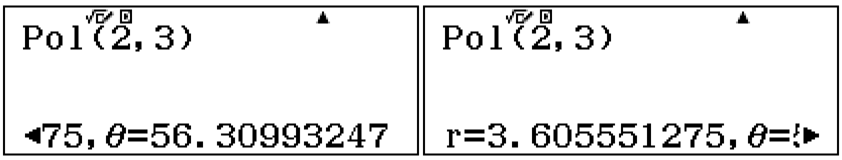
أنظمة الإحداثيات (Coordinate systems)

إضافة لتعامله مع المثلثات، ينخرط حساب المثلثات في تمثيل نقاط المستوى. حيث يعتبر نظام الإحداثيات المستطيلة (Rectangular coordinates) الطريقة الأكثر شيوعا للقيام بذلك، وذلك عبر تحديد مدى ابتعاد نقطة ما عن محورين أفقي وعمودي. وهكذا مثلا، فإن النقطة (2،3) هي وحدتان إلى اليمين و3 وحدات إلى الأعلى.

بشكل عام، يتم تمثيل نظام الإحداثيات المستطيلة بـ (x, y). و يسمى هذا النظام: بالنظام الديكارتي (Cartesian coordinates) نسبة إلى المخترع وعالم الرياضيات والفيلسوف "رينيه ديكارت".

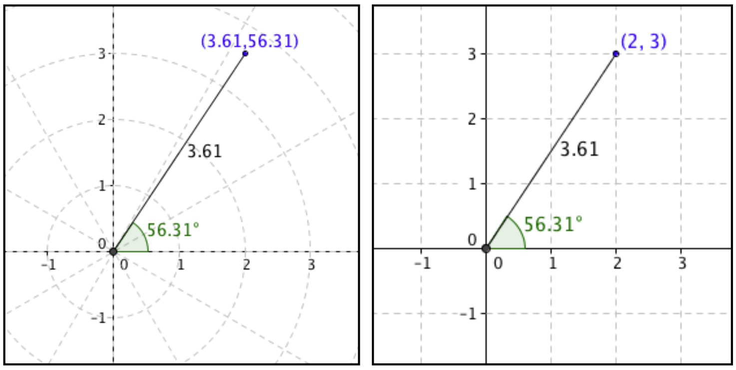
يستخدم نظام الإحداثيات القطبي (Polar coordinates) كنظام بديل ويتم فيه قياس المسافة المباشرة بين النقطة و نقطة الأصل وزاوية الدوران وذلك عكس اتجاه دوران عقارب الساعة من المحور x. حيث يتم تمثيل الإحداثيات القطبية بالرموز (r,θ).

لدى آلة ClassWiz الحاسبة أوامر (Pol) [SHIFT] [+] و(Rec) [SHIFT] [−] من أجل التحويل بين هاذين النظاميين حيث توضح الشاشات في الأدنى كيفية القيام بعملية التحويل من نظام الإحداثيات الديكارتي لنظام الإحداثيات القطبي. تأكد من استخدامك وحدات الزاوية الصحيحة (درجة أو راديان) حيث ستحتاج إلى استخدام الفاصلة، (متاحة بالضغط على [SHIFT] [)]) وذلك من أجل إدخال الأوامر.

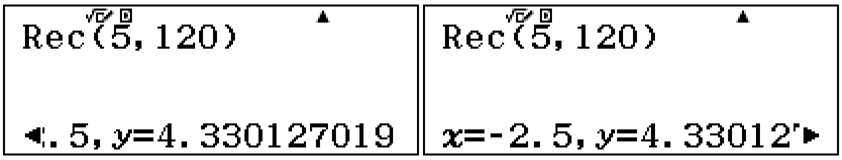


ولأن الأرقام طويلة جدا لكي تتسع لها الشاشة، استخدم مفتاح [▶] لرؤية المخرجات بأكملها. في هذه الحالة، يمكن تمثيل النقطة (2, 3) بنظام الإحداثيات القطبي على أنها تقريبا (3.61, 56.31)، مشيرا إلى أنها 3.61 وحدة من نقطة الأصل و56.31^{o} عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور الأفقي.

تحقق في الرسوم البيانية أدناه من أن نفس النقطة يمكن وصفها بدقة باستخدام إما الإحداثيات الديكارتية أو القطبية.



بطريقة مماثلة، تعرض الشاشات في الأسفل نظام الإحداثيات الديكارتي لنقطة على مسافة 5 وحدات من المحور بدوران 120^{o} عكس اتجاه عقارب الساعة.

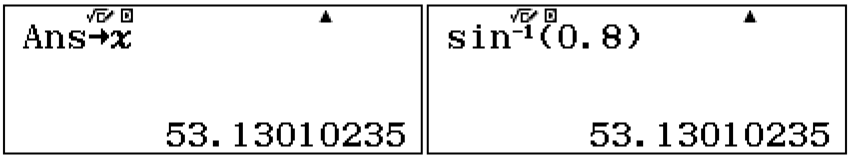


بالتالي يمكن تمثيل النقطة $(5,120^{o})$ بنظام الإحداثيات الديكارتي تقريبا بالإحداثيات $(-2.50,4.33)$. لاحظ أن هذه النقطة هي في الربع الثاني، حيث أن قيمة x سالبة وقيمة y موجبة.

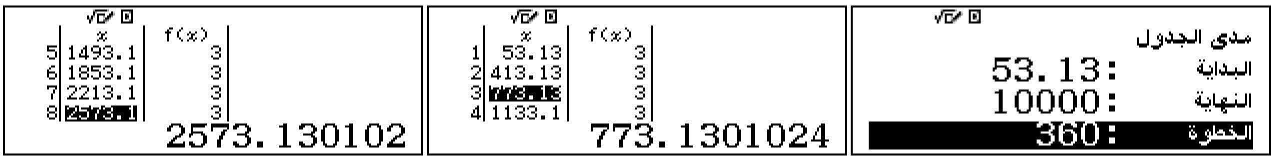
المعادلات المثلثية (Trigonometric equations)

هناك حاجة إلى الحذر عند حل المعادلات المثلثية وذلك على اعتبار أنها غالبا ما تحوي الكثير من الحلول مالم يتم تقييد المجال. على سبيل المثال، انظر للمعادلة البسيطة التالية: $5\sin x - 1 = 3$.

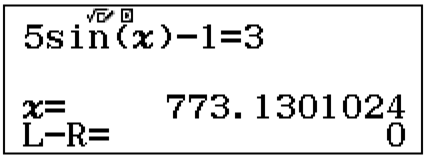
إذا تم إعادة كتابة المعادلة لتصبح $\sin x = 0.8$، سيكون الحل هو $x = \sin^{-1}0.8$ حيث $x \approx 53.13^{o}$.

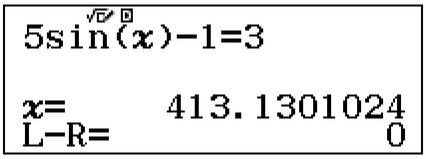


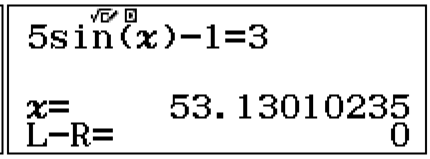
من أجل $0^{o} \leq x \leq 90^{o}$ ، تكون $x \approx 53.13^{o}$ الحل الوحيد للمعادلة. ومع ذلك، هناك قيم أخرى لـ x يمكن أن تكون حلولا هي أيضا على اعتبار أن دالة الجيب هي دالة دورية مع قيم تتكرر كل 360^{o}. بالتالي تكون باقي الحلول بعد ذلك هي $360^{o} + 53.13^{o}, 720^{o} + 53.13^{o}$ ...أو (وبشكل عام) $360k + 53.13^{o}$ (مقربة إلى أقرب خانتين عشريتين). يمكنك رؤية هذه الحلول في جدول من أجل $f(x) = 5\sin x - 1$، مع البدء بـ 53.13 وخطوة بمقدار 360^{o}. (من الأفضل تخزين قيمة البداية في الذاكرة (مثل x أعلاه) ثم استخدام هذا المتغير في بداية (Start) الجدول وذلك من أجل الحصول على القيمة الصحيحة بكفاءة). ويعرض الجدول الموضح في الأسفل مقتطفات، حيث يشير إلى أن هناك العديد من الحلول الأخرى (في الواقع، عدد لا نهائي)؛ بمعنى آخر، قيم x التي عندها $5\sin x - 1 = 3$.



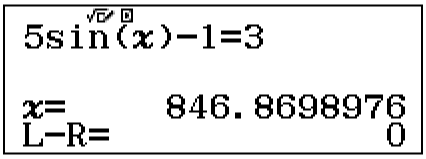
تقدم آلة ClassWiz أصغر حل للمعدلة $x = \sin^{-1}0.8$، ولكن لو قررت حل المعادلة باستخدام الأمر Solve، سيجري توفير الحلول الأخرى عبر البدء بقيم مختلفة من أجل x. لقد جرى إنشاء الحلول الثلاثة الموجودة في الأسفل مع قيم بدء هي 0، 360 و720 على التوالي.

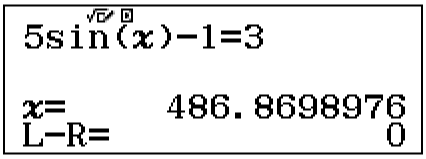


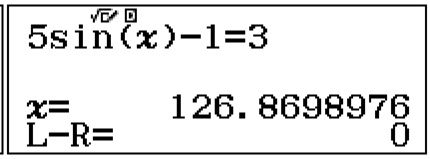




في هذه الحالة، لا يزال هناك المزيد من الحلول، وذلك بسبب خاصية الزوايا التكميلية لدالة الجيب: $\sin(180^\circ - x) = \sin x$. إن الحلول أدناه تم إنشائها من أجل القيم الإبتدائية 180، 540، 900، ...







إذا نظرت في الأنماط هنا عن كثب، يمكنك أن ترى أنه بشكل عام هناك مجموعة ثانية من الحلول في صيغة $126.87^\circ + 360k$، حيث k عدد صحيح.

وكما هو الحال من قبل، سيعرض لك الجدول كيف أن هناك العديد من قيم x من أجل حل المعادلة.

في هذه الحالة، إذا تضمنت المعادلة مجالا من أجل x مثل:

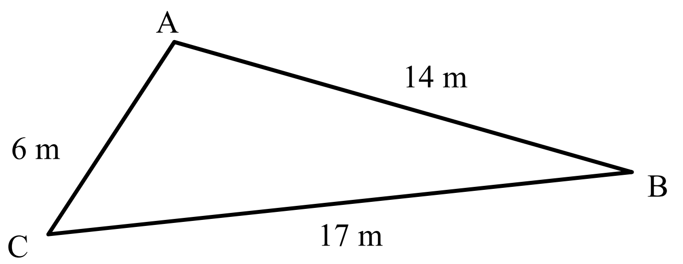
$5\sin x - 1 = 3$، من أجل $0^\circ \le x \le 180^\circ$

إذن لا يوجد سوى: $x = 53.13^\circ, 126.87^\circ$ (مقربا إلى منزلتين عشريتين). ولكن إذا لم يتم تحديد أي مجال، سيكون هناك عدد لانهائي من الحلول: $x = 53.13^\circ + k360^\circ$، $x = 126.87^\circ + m360^\circ$، من أجل k وm عددين صحيحين (لاحظ أن كيف أن k وm يمكن أن يكون عددين سالبين أو موجبين).

تمارين

إن الهدف الرئيسي لهذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة.

1. أوجد a) $\sin 36^o$ b) $\cos 2$ راديان c) $\tan 70$ غرادين
2. قم بتحويل 34.458 درجة إلى درجات ودقائق وثواني.
3. إن ظل زاوية في مثل قائم هي 0.6، ما هو قياس الزاوية؟
4. قم بعمل جدول لقيم دالة جيب التمام للزوايا بين 0 و 180 درجة. استخدم الجدول لمعرفة كيف أن $\cos x$ و $\cos (180^o – x)$ هما مرتبطان.
5. أعط القيمة الدقيقة من أجل$\sin 15^o$.
6. تملك زاوية مقياسا هو 1.4 راديان. أعط حجمها بالدرجات والدقائق والثواني.
7. ما هو قياس الراديان للزاوية 31^o؟
8. أعط الإحداثيات القطبية للنقطة (6,5)
9. أعط الإحداثيات الديكارتية للنقطة ذات الإحداثيات القطبية $(4, 240^o)$. في أي ربع تقع هذه النقطة؟
10. يرغب الطلاب في حساب طول شجرة على بعد 50 مترا منهم. قاموا بقياس زاوية ارتفاع الشجرة ووجدوا أنها 17^o. احسب الطول التقريبي للشجرة
11. في مثلثABC، لدينا $AC = 17.2$ cm ، $B = 35^o$ و $A = 82^o$. أوجد طول BC مقربا لخانة عشرية واحدة.
12. في مثلث KLM، $K = 56^o, KM = 13.5$ m ، و $LM = 16.8$ m.
    a) استخدم هذه المعلومات وقانون الجيب من أجل إيجاد باقي الزوايا في المثلث.
    b) فسر لم لا تنطبق الحالة الغامضة على هذا المثلث.
13. لم يتم رسم المثلث ABC وفق المقياس. استخدم أطوال الأضلاع وقانون جيب التمام (Cosine Law) من أجل إيجاد الزوايا الثلاثة إلى أقرب درجة.



14. أوجد حل المعادلة $4 \cos x + 6 = 7$ في الفترة $0^o < x < 360^o$.
15. أوجد حل المعادلة $5 \sin x – 2 = 1$.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا

1. قم بالنظر للمثلث المعروض في الصفحة الأولى من هذه الوحدة. تعطي القياسات الحقيقة في التطبيقات دوما أخطاء. افترض أن طول الضلع AB ينظر إليه على أنه 0.1 ± 4.2 متر وزاوية B على أنها5^o± 38^o، وذلك بسبب الأدوات المستخدمة في القياس. استكشف آثار ذلك على حساب AC بإستخدام هذه القياسات غير الدقيقة.

2. قم بعمل جدول قيم لدالتي جيب وجيب التمام للزوايا (بالدرجات) من 0 إلى 360. استخدم خطوة مقدارها 15 لكي لا يكون الجدول كبيرا جدا للآلة الحاسبة. قم بدراسة قيم الجدول بعناية من أجل النظر في العلاقات بين جيوب وجيوب التمام للزوايا ضمن كل ربع. قد يكون من المفيد كتابة القيم على الورق من أجل المساعدة على المقارنة.

حاول أيضا إيجاد روابط بين جيوب وجيوب التمام للزوايا.

3. ضع آلتك الحاسبة على وضع الراديان بدلا من الدرجات. قم بإنشاء جدول قيم لدالة الجيب f(x) = sin x ودالة جيب التمام g(x) = cos(x) من أجل قيم x بين 0 و π. استخدم خطوة هي π÷24، مستخدما مفتاح π في آلتك الحاسبة عند الضرورة (يعني SHIFT ×10^x).

   a) قارن جدولك مع ذاك المقترح في النص والذي يستخدم الدرجات. ما هي التناظرات التي تراها في الجدول؟

   b) استخدم الرسم البياني لدائرة الوحدة من أجل فهم أسباب التناظر.

4. ضع آلتك الحاسبة على وضع الدرجات. استكشف العلاقات بين قياسات الزاويا والجيوب.

   أ) على سبيل المثال، في حال تضاعف قياس الزاوية، هل يتضاعف جيبها أيضا؟ بعبارة أخرى، هل sin 2A = 2sin A؟ قم بالعمل مع شريك، أحدكما من أجل إيجاد sin A والآخر لإيجاد sin 2A من أجل قيم متعددة لـ A. قد يكون من المفيد تكوين جدول.

   ب) في الواقع، فإن sin 2A = 2 sin A cos A. اختبر هذه العلاقة مستخدما قيم مختلفة للزاوية A. قم بالعمل مع شريك، حيث يقوم أحدكما باختيار قيمة لـ A وكل واحد منكما يحاول اختبار طرف من أطراف المعادلة. [من الطرق الجيدة لإيجاد حل لتعبير مثل 2 sin A cos A يتمثل في استخدام أمر CALC أو استخدام جدول].

5. قم برسم مثلث كبير على الورق وقم بالقياس بعناية أطوال أضلاعه حيث يجب أن تكون قادرا على قياسه لأقرب ميليمتر. بعدها استخدم قاعدة جيب التمام (cosine rule) من أجل إيجاد قياسات الزوايا الثلاثة لمثلثك إلى أقرب دقة ممكنة. بعد انتهائك من الحسابات، تحقق من قياسات الزوايا الخاصة بالمثلث عن طريق منقلة. ما مدى قرب حسابات وقياساتك من الحقيقة؟ جرب مثالا آخر وقارنه مع طلاب آخرين.

6. ربما قد لاحظت بأن بعد القيم المثلثية تكون معطاة تماما بالآلة الحاسبة (باستخدام إشارة الجذر)، بينما تكون أخرى تقريبية مع فاصلة عشرية. على سبيل المثال، يجري إعطاء نسب زوايا 30^o, 45^o، 60^o، و90^o كلها بشكل دقيق؛ يمكن الحصول عليها من علم الهندسة الخاص بالمثلثات الخاصة. في حالات أخرى، يمكن استخدام الصيغ المثلثية من أجل إيجاد القيم بشكل دقيق. على سبيل المثال،

إليك صيغتان مستخدمتان من أجل إيجاد جيوب التمام للفرق وأنصاف الزوايا

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad \cos(A-B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

قم بالتحقق من هذه الصيغة من أجل إيجاد جيوب التمام الدقيقة لزاويا أخرى ومن ثم استخدام الآلة الحاسبة للتحقق من نتائجك.

ملاحظات من أجل المعلمين

سلط هذا الفصل الضوء على الطرق التي يمكن فيها لآلة *ClassWiz* أن تدعم الطلاب على التفكير في عدة جوانب من علم المثلثات. حيث جرى التطرق إلى وحدات قياس الزوايا المختلفة (الدرجات، الراديان، الغراد) إضافة إلى التحويل بين النظام الديكارتي والنظام القطبي. تعتبر الآلة الحاسبة أداة مناسبة من أجل الحسابات المثلثية، مثل تلك التي تستخدم قانوني الجيب وجيب التمام إضافة إلى حل المعادلات. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من عدة وجوه. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل إكتساب خبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. a) 0.5878   b)-0.4161   c) 1.9626   2. 34°27′28.8″

3. 30.9638درجة   4. استخدم خطوة من 10 درجات لرؤية كيف أن cos (180° – x) = -cos x.   5.
(√6 - √4)/4   6. 80°12′50.73″   7. 31π/180 = 0.5411^R

8. (7.8102,39.8056°)   9.(-3.4641,-2)، في الربع الثالث   10) 15.3م

11. 29.7متر   12. a)L ≈ 41.77°, M ≈ 82.23°

b) إذا كانت L ≈ 138.23° ، مجموع زاوايا المثلث KLM سيزيد على 180°.

13. A ≈ 110°, B ≈ 19°, C ≈ 51°   14. 75.5°, 284.5°

15. 36.9° + k360°, 143.1° +m360°، k, m أعداد صحيحة

نشاطات

1. يجذب هذا النشاط الانتباه إلى حتمية وجود أخطاء في القياسات ودراسة بعض العواقب المحتملة. في المثال المعطى، قد يكون طول طلع AC على أقل تقدير 2.23 متر، والارتفاع على أكبر تقدير 2.93 متر ويمثل مجال كبير. نأمل ألا تثبط مثل تلك الاستكشافات من همة الطلاب في الاستخدام الروتيني للمنازل العشرية المقدمة للأجوبة من قبل الآلة الحاسبة. قد يكون من المفيد مناقشة احتمالية أخطاء القياس مع الطلاب وذلك كنتيجة لمحاولاتهم قياس أطوال وزوايا في الممارسة العملية (ملاحظة توحي الأخطاء في الزوايا أنها أكبر من تلك الخاصة بالأطوال).

2. يتابع هذا النشاط ذلك المقترح في الصفحة الثالثة من الوحدة والذي يتضمن توسعة الزوايا التي ليس لها إرتباط مع مثلثات مثل تلك الموجودة بين 180° و360°. يجب تشجيع الطلاب على النظر إلى العلاقات بين نسب الزوايا A و (A + 360°). إن النشاطات من هذه النوع مناسبة بشكل خاص في إتحادها مع الرسوم (مثل دائرة الوحدة) وهي تهدف إلى إضافة معنى إلى العلاقة النظرية مثل هذه العلاقة (180° – A) = -cos A.

3. يجري قياس العلاقات من أجل الزوايا بكل من الدرجات والراديان حيث هما نفس الشيء، ويهدف هذا النشاط إلى مساعدة الطلاب على فهم عملية تغيير وحدات القياس وكيف أنها لا تؤثر على العلاقات جوهريا. لاحظ قيام الآلة الحاسبة بتحويل القيم الدقيقة لكل من π و 24÷π لأجزاء عشرية.

4. يبدو بأن هناك العديد من الطلاب يطورون فهما خاطئا مفاده أن $\sin 2A = 2 \sin A$، بالتالي يهدف هذا النشاط إلى استكشاف هذا الوضع عدديا وذلك من أجل إنهاء مثل تلك الأفكار والتعميمات. من المفضل أن يقوم الطلاب بهذا النشاط كأزواج مع امتلاك كل طالب لآلة حاسبة. استخدام زوج من الجداول بحيث $f(x) = \sin 2x$ و$g(x) = 2 \sin x$ سيكون أيضا أمرا فعالا.

5. يمكن تنفيذ العديد من التمارين التطبيقية باستخدام الآلة الحاسبة والقياسات الحقيقية. سيساعد هذا المثال الطلاب على رؤية القيمة العملية لقانون جيب التمام وأيضا تقدير أهمية القياس الدقيق على اعتبار أن النتائج المقاسة والمحسوبة لن تكون متماثلة في أغلب الأحيان. قد يؤدي العمل على مثل هذه التمارين إلى تثبيط الطلاب والمبالغة في تفسير عدد الخانات العشرية في نتائج الآلة الحاسبة.

6. يستخدم هذا النشاط الآلة الحاسبة من أجل التحقق من الحسابات المشتقة بصورة دقيقة وتتطلب من الطلاب مهارة عالية. في الحقيقة، تعطي الآلة الحاسبة النتيجة تماما من أجل الزوايا التي هي من مضاعفات 15^o مثل $\sin(15^o) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$، بينما سيساعد هذا النشاط الطلاب على فهم أصول مثل تلك العلاقات.

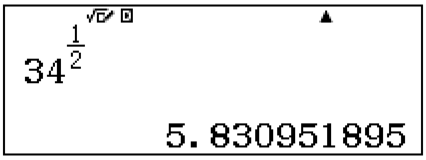
الوحدة السادسة
الدوال الأسية واللوغاريتمية

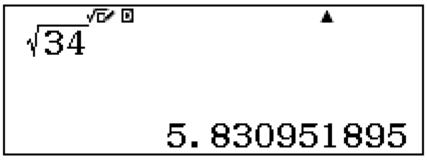
للدوال الأسية واللوغاريتمية مكانة هامة في الرياضيات وتطبيقاتها حيث توفر الآلة الحاسبة ClassWiz دعما كبيرا لفهم واستخدام هذه الدوال. ابدأ هذه الوحدة بوضع الآلة الحاسبة في وضع الحساب من خلال النقر على MENU 1.

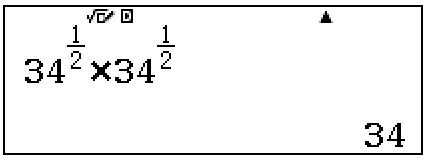
الأسس والجذور

تطرقنا خلال الفصول السابقة لأسس الأعداد، مثل المربعة والمكعبة، حيث استخدمنا الحاسبة لإيجادها. تقوم مفاتيح المربع والمكعب بإيجاد هذه القوى عبر ضربها المتكرر. بمعنى آخر، إذا استخدمت الحاسبة لإيجاد 34^2 باستخدام مفتاح x^2 ، ستقوم بإيجاده عبر القيام بعملية ضرب 34 في 34. كذلك مفتاح x^{-1} يستخدم القسمة لإيجاد المعكوس. من ناحية أخرى، عليك باستخدام مفتاح $x^{\blacksquare}$ من أجل الأسس الأخرى التي تتضمن الكسور أو الكسور العشرية أو قوى أعلى من التربيع والتكعيب.

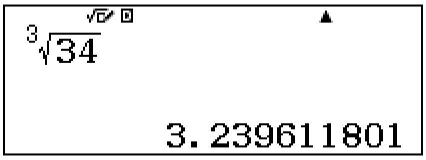
في حين أننا يمكننا معرفة أس مثل 34^5 بوضوح، هناك أسس أخرى لا تكون واضحة لهذه الدرجة مثل $34^{2/5}$ أو $34^{0.43}$. رأينا بعض الحالات الخاصة بهذه الأسس في الوحدة 2 والتي فيها رأينا كيف أن رفع عدد إلى أس ½ مساوٍ لإيجاد الجذر التربيعي له كما هو مبين أدناه.

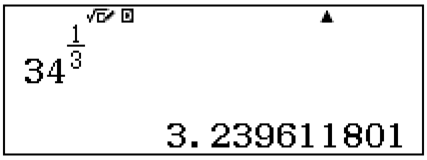


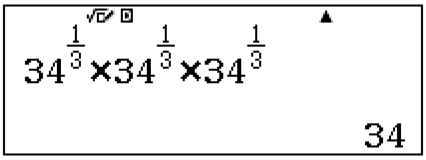




وهناك نوع مماثل لهذه العلاقة للجذور التكعيبية:







تعتمد الخصائص المماثلة لهذه على قوانين الأسس على اعتبار أن هذه الأسس يمكن أن تضاف إلى بعضها عندما يجري ضرب أسس لنفس الأساس، كما هو مبين أدناه:

$$a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^1=a$$

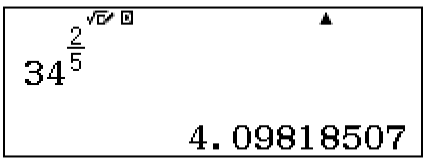
يمكن أن تساعدك طريقة التفكير هذه على فهم معنى الأعداد المرفوعة لأسس كسرية أو كسور عشرية. قم بالنظر إلى $34^{2/5}$، وذلك باستخدام قوانين الأسس:

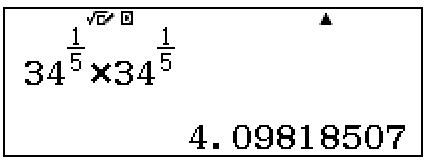
$$34^{\frac{2}{5}}=34^{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}=34^{\frac{1}{5}}\times34^{\frac{1}{5}}=\left(34^{\frac{1}{5}}\right)^2$$

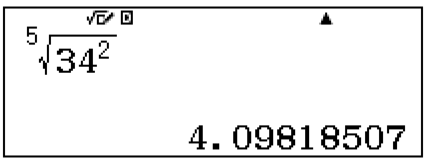
أو

$$34^{\frac{2}{5}}=34^{2\times\frac{1}{5}}=\left(34^2\right)^{\frac{1}{5}}$$

بالتالي، يمكن النظر إليها على أنها إما مربع الجذر الخامس لـ 34، أو أنها الجذر الخامس لمربع 34 كما هو مبين أدناه:





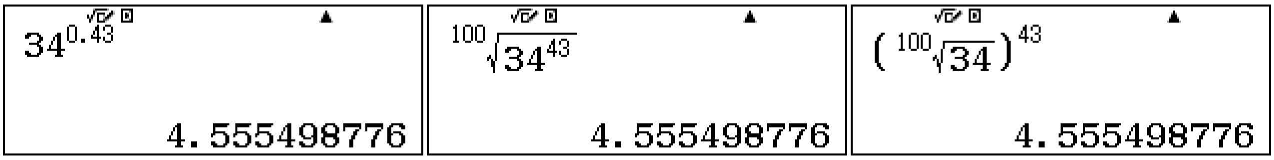


تعرض الآلة الحاسبة كيف أن هاتين الطريقتين تعطيان نفس النتيجة العشرية. كما أنه يجب استخدام مفتاح الأس $x^{\blacksquare}$ ومفتاح الجذر ($\sqrt[\blacksquare]{\square}$). لاحظ أيضا أن هذا الرقم أقل قليلا من $\sqrt{34}$ كما هو موضح أعلاه، وهو أمر متوقع لكون الكسر 2/5 أقل قليلا من 1/2.

قمنا بتوضيح هذه الخصائص للعدد 34، إلا أن نفس الأفكار يمكن تطبيقها على أي عدد موجب. تعتبر العلاقة العامة الهامة لمساعدتك على فهم معنى الأعداد المرفوعة لأسس مختلفة هي العلاقة التالية، وذلك لجميع الأعداد الصحيحة m وفيها $n\ (\neq 0)$ ومن أجل الأساس $x > 0$:

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \qquad \text{أو} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

على الرغم من قدرتك على إيجاد العدد المرفوع لأس على الآلة الحاسبة باستخدام أي من العبارات الموضحة في الأعلى، من الملائم أكثر في العادة أن يجري إيجادها بشكل مباشر وذلك باستخدام مفتاح $x^{\blacksquare}$ حيث تعرض الشاشات أدناه كل الاحتمالات الثلاثة الخاصة بإيجاد $34^{0.43}$.



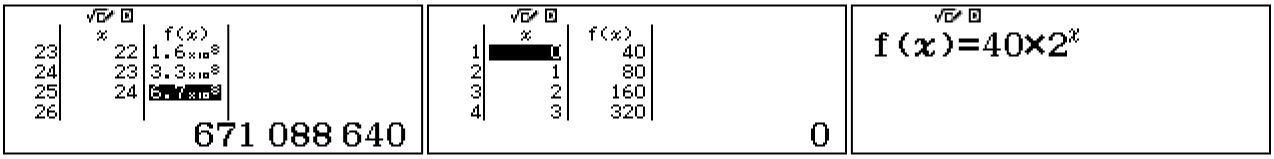
لاحظ مرة أخرى من الشاشات أعلاه كيف أنه وعلى اعتبار أن 2/5 < 0.43 < ½، فإن هذه الأسس للعدد ما لها نفس العلاقة $34^{2/5} < 34^{0.43} < 34^{1/2}$.

استكشاف الدوال الأسية

إن الدالة الأسية هي دالة فيها الأس متغير. هناك عدة أمثلة حول دوال أسية متزايدة أو متناقصة. على سبيل المثال، انظر في تعداد بكتيريا يتضاعف عددها مرتين كل ساعة مع البدء بالعدد 40. إذا كانت x ترمز لعدد الساعات بعد البدء، فإن عدد البكتيريا في أي وقت من لحظة البدء سيكون بالشكل التالي:

$$f(x) = 40(2^x)$$

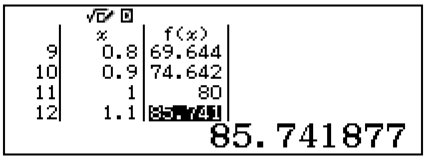
من الطرق الجيدة لفهم كيف تنمو أعداد البكتيريا هي عبر إنشاء جدول خاص بالدالة. قم باستخدام وضع الجدول (عبر ضغط MENU 9) باختيار قيم x لتكون ما بين 0 (البداية) و 24 (بعد يوم كامل).

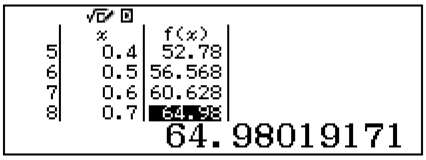


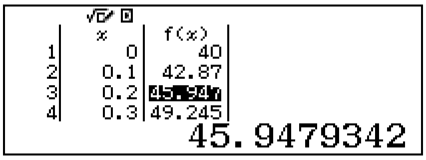
تعرض عملية التنقل بين عناصر الجدول كيف أن التعداد يبدأ عند رقم 40 ثم يتضاعف كل ساعة حيث يتضح من الجدول كيف أن هذا النوع من النمو سريع جدا. إذا قمت بالانتقال إلى الجزء السفلي من الجدول، سترى أنه بعد 24 ساعة سيصل تعداد البكتريا إلى أكثر من 671 مليون!

لاحظ أنه عندما $x = 0$، فإن $f(0) = 40 \times 2^0 = 40$ وذلك لأن أي عدد موجب مرفوع إلى القوى 0 هو دائما 1.

يمكن فحص النمو على فترات أقل من ساعة. على سبيل المثال، إذا قمت بتكوين جدول قيم مع خطوة 0.1 ساعة بدلا من 1، يمكنك فحص كيفية نمو تعداد البكتيريا كل ست دقائق (أي كل 0.1 ساعة). (سينخفض القيمة العظمى في الجدول إلى 2.9 ساعة وذلك لأن الجدول لا يسمح بأكثر من 30 قيمة). إليك الآن بعض المقتطفات المتحصل عليها من الجدول:



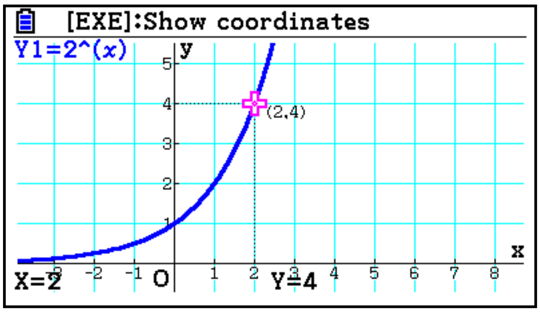




لاحظ كيف أن الدالة الأسية المستخدمة لنمذجة النمو تعطي نتائج لا تمثل أعداد كلية (وهذا الأمر غير منطقي لعدد البكتريا). يعتبر هذا الأمر شائعا في النماذج الرياضية والتي تقدم دوما نسخا مثالية عن الواقع.

لاحظ أيضا أنه بعد انقضاء فترة ولو صغيرة، يزيد التعداد أكثر من السابق حيث نرى بين فترة 0 و0.2 ساعة كيف تغير تعداد البكتيريا تقريبا 6، وكيف أنه بين 0.3 و 0.5 ساعة، تغير تقريبا أكثر من 7، بينما بين 0.6 و 0.8 ساعة تغير أكثر من 9. يعتبر هذا النوع من الاستكشاف نموذجيا في النمو الأسي. قم باستكشاف بعض الأجزاء الأخرى من الجدول بنفسك.

الرسوم البيانية للدوال الأسية مع أساس موجب أكبر من 1 لها شكلا مميزا. حيث يعرض الشكل في الأسفل المخطط البياني للدالة $f(x) = 2^x$ والذي جرى إنشاءها باستخدام الآلة الحاسبة البيانية كاسيو FX-CG20، حيث يظهر نموا سريعا من أجل القيم الموجبة لـ x. تملك الدالة قيما موجبة فقط، ولكنها أيضا تكون صغيرة للغاية عندما $x < 0$. لاحظ أنه عندما $x = 0$، تكون قيمة الدالة هي 1 (لأن $2^0 = 1$).



بعض الدوال الأسية لا تتضمن نموا أسيا، لكنها قد تتضمن تحلل أسي، حيث تكون هذه هي الدوال ذات أساس بين 0 و 1، بالتالي يؤدي الأس الأكبر إلى قيم أصغر لهذه الدوال. من أفضل الأمثلة حول ما سبق هو التحلل الإشعاعي. تملك المواد المشعة وقتا يسمى نصف الحياة، والذي فيه تتحلل نصف المادة المشعة. لو عرفت عمر النصف لمادة ما، يمكنك تحديد الدالة المعنية.

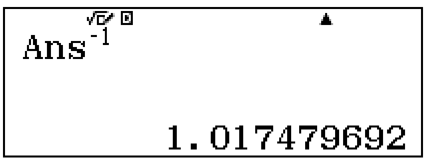
افترض أن لديك 20 غراما من مادة مشعة لها نصف حياة تقدر بـ 40 يوما. بالتالي سيكون النموذج للكمية المتبقية بعد عدد أيام x ممثلا بالمعادلة:

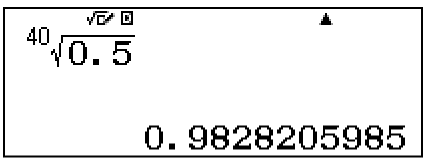
$$f(x) = 20b^x$$

حيث ترمز b إلى أساس النموذج. إذا قمت باستبدال x بـ 40 (نصف الحياة)، بالتالي سيكون لديك 10 غرامات متبقية:

$$10 = 20b^{40}$$

وهو ما يمكن أن تجده عبر القيام بتحويل المعادلة السابقة للشكل $b = \sqrt[40]{0.5}$ الأمر الذي يعطينا تقريبا ≈ $0.98282 = 1.0175^{-1}$ كما هو مبين أدناه:

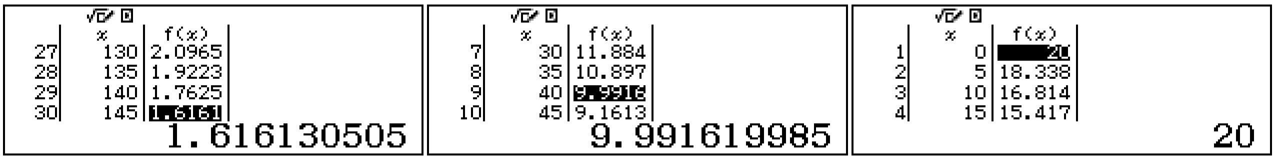




بالتالي يمكن التعبير عن نموذج التحلل الأسي بهاتين الطريقتين أدناه

$f(x) = 20 \times 0.9828^x$ أو $f(x) = 20 \times 1.01748^{-x}$

تملك النسخة الأولى أساسا أقل من واحد، في حين تملك الثانية أس سالب. إذا قمت بإنشاء جدول قيم من أجل هذه الدالة، وذلك باستخدام أي من الشكلين، يمكنك أن ترى بوضوح أن القيمة تتناقص مع تزايد المتغير (x)، وستصل في نهاية المطاف إلى عدد قريب جدا من الصفر مع تحلل المادة. وتعرض الشاشة التالية في الأسفل بعض القيم من الجدول لتوضيح هذه الخصائص:



استخدام النماذج الأسية

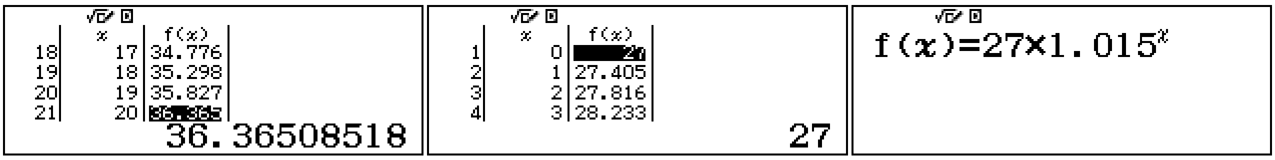
تعد الدوال الأسية مفيدة جدا من أجل نمذجة بعض الظواهر في العالم الحقيقي. ويحدث النمو الأسي (أو التحلل الأسي) عندما تزيد كمية ما (أو تنقص) بعامل ثابت في كل فترة زمنية. هناك العديد من عمليات النمو الطبيعية من هذا النمط، مثل تعداد السكان والذي يجري وصفه عادة بنسبة مئوية سنوية. بالتالي، إذا كانت النسبة المئوية ثابتة خلال كل فترة زمنية، سيبقى النمو الفعلي في تزايد لأن السكان أنفسهم آخذين في الازدياد. إن التغيرات السكانية ليست سريعة مثل نمو البكتيريا بطبيعة الحال، ولكن فكرة النمو في الحالتين يبقى نفسه.

من الأمثلة على ذلك تعداد سكان المملكة العربية السعودية التي تشير التقديرات إلى أنه سيبلغ حوالي 27 مليون شخص في عام 2014 وذلك بمعدل نمو سنوي يقارب 1.5%. لاستخدام الرياضيات في تصميم نموذج لتعداد سكان المملكة العربية السعودية، فإننا سنفترض بأن معدل النمو السكاني مستقر (على الرغم من أنه قد يتغير مع مرور الوقت).

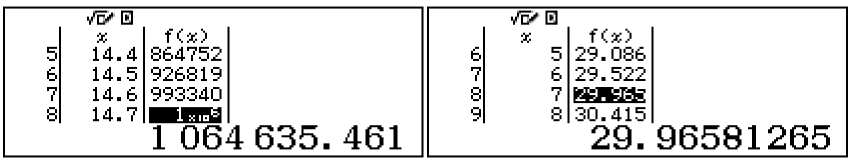
يزيد عدد سكان كل عام بنسبة 1.5%. ولكي تتمكن من تحويل هذا النمو إلى شكل أسي، ستحتاج للتفكير بالنمو السنوي 1.5% على أنه سيبقى ثابتا مع ضرب عدد السكان كل سنة بنسبة 101.5% أو 1.015. بالتالي سيجري إعطاء عدد السكان بعد x سنة (بعد عام 2014) بالدالة الأسية التالية:

$$f(x) = 27 \times 1.015^x$$

سيسمح لك جدول القيم بتقدير التعداد بعد مرور سنوات معينة حيث تدرج الشاشات في الأسفل بعض الأمثلة حول هذا الموضوع. لاحظ كيف أن تعداد السكان يجري تقديره بالملايين حيث سيصل عدد سكان المملكة (بحسب النموذج) إلى36,4 مليون نسمة بحلول عام 2034.



تعتبر مثل هذه النماذج الأسية مفيدة من أجل التنبؤ بالنمو حيث يمكن أن تستخدم للرد على أسئلة على غرار "متى تتوقع أن يصل سكان المملكة العربية السعودية إلى 30 مليون نسمة في حال استمر المعدل الحالي بالنمو نفسه؟"، أو "بعد كم ساعة سيصل عدد البكتيريا إلى المليون؟" للإجابة على أسئلة من هذا النوع، يمكن استخدام الخاصية CALC أو استخدام جدول مع اختيار جيد لقيم كل من البداية والنهاية والخطوة كما هو مبين أدناه.



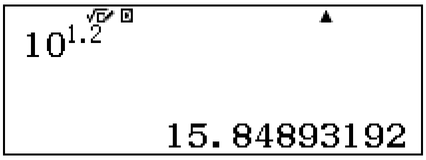
بعد التعديل، يشير التنقل خلال الجدول إلى أن الإجابة على السؤال الأول ستكون حوالي عام 2021 والذي يعني بعد سبع سنوات من عام 2014. أما ما يتعلق بالسؤال الثاني فيبدو بأن سيكون بعد حوالي 14.6 أو 14.7 ساعة من البداية. بينما قد تبدو هذه الطرق كافية من الناحية العملية، هناك طرق أكثر قوة وهي عبر استخدام اللوغاريتمات والتي سنتحدث عنها الآن.

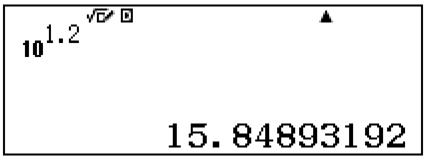
اللوغاريتمات

ترتبط فكرة اللوغاريتم ارتباطا وثيقا بالأس. ومن أجل رؤية هذا الارتباط، انظر للدالة الأسية للأساس 10:

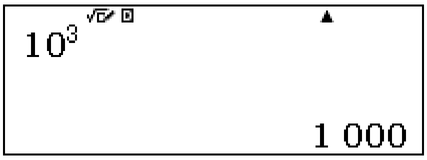
$$f(x) = 10^x$$

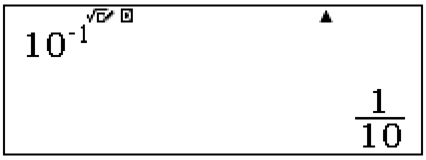
إذا علمنا الأس، كأن يكون مثلا $x = 1.2$، سنتمكن من العثور على القيمة باستخدام مفتاح $x^{\blacksquare}$ في الآلة الحاسبة. في الواقع، هناك أمر خاص من أجل الدوال الأسية ذات الأساس 10 وهو **($10^{\blacksquare}$)** الذي يمكن الوصول إليه عبر الضغط على زري SHIFT log▫□ حيث تعرض الشاشتين في الأسفل كلتا الطريقتين.





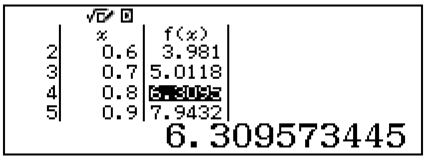
بالنسبة لبعض قيم الأعداد المألوفة لـ x، ليس من الضروري استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة الدالة بالرغم من أنها موضحة في الأسفل.

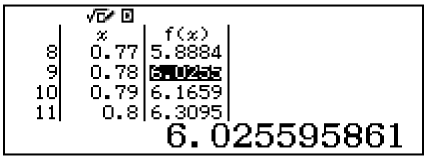


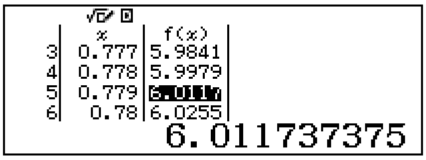


من أجل الأعداد التي تملك قوى للأساس عشرة فتعد رؤية العلاقات فيها أسهل بين الأس وبين القيمة، ولكن يغدو الأمر أصعب بكثير من أجل رؤية أس 10 الذي سيعطي قيمة معينة لأرقام أخرى. على سبيل المثال، ما الأس اللازم من أجل الحصول على $f(x) = 10^x = 6$؟

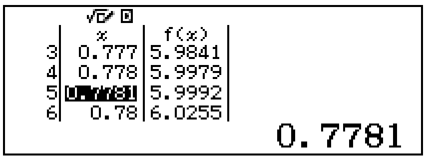
إحدى الطرق الخاصة بمعالجة هذه المسألة تكمن في استخدم جدول القيم من أجل الدالة. انظر مليا للشاشات التالية من أجل رؤية كيفية اقتراب كل واحدة منها من أجل إيجاد القيمة التي فيها $10^x = 6$.

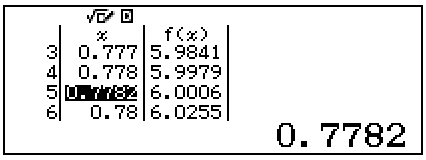


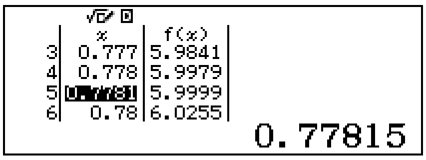




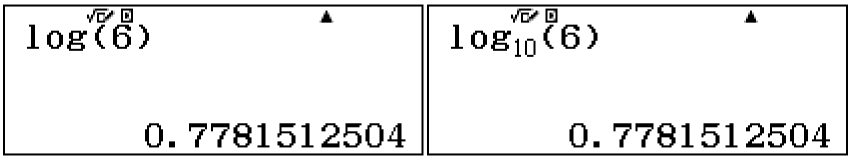
يبدو بأن قيمة x هي بين 0.778 و 0.779. يمكن إنشاء جداول إضافية من أجل تحسين دقة القيمة. وتكمن الطريقة الأخرى في إنشاء جدول جديد مع تغيير قيمة x فيه وتعديلها حتى نصل إلى أن تكون f(x) قريبة من 6. إليك الآن بعد الأمثلة المتتالية في الأسفل.





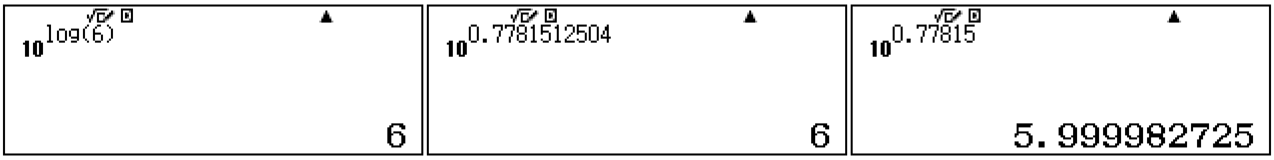


من ناحية أخرى، يعتبر إيجاد الأس من أجل إعطاء قيمة معينة أمرا مفيدا وذلك لأن الآلة الحاسبة تملك بدورها مفاتيح خاصة من أجل إكمال ذلك بكفاءة. ويشار إلى تلك القيمة بأنها لوغاريتم 6 إلى الأساس 10 حيث تبين الشاشات أدناه كيف أن $\log_{10}6 = 0.77815$ مقربة إلى خمس منازل عشرية. في الشاشة الأولى، جرى استخدام مفتاح log▫□ حيث أنت بحاجة إلى إدخال أساس اللوغاريتم (في هذه الحالة هو 10).

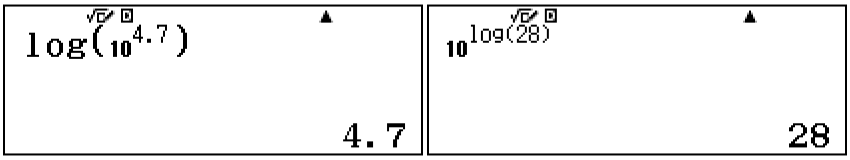


تستخدم اللوغاريتمات ذات الأساس 10 على نطاق واسع، وتكتب بشكل مختصر log (من دون ذكر للأساس)، وتستخدم الآلة الحاسبة هذه نفس التحويل حيث تعرض الشاشة الثانية أعلاه هذا وذلك باستخدام أمر (log) ⊖ SHIFT. يمكنك مع هذا الأمر عدم إدخال الأساس 10.

إن لوغاريتم عدد ما هو الأس الذي يجب رفع الأساس 10 له كي يعطي ذلك العدد. وتعرض الشاشة الأولى في الأسفل كيف أن القيمة 0.77815 التي جرى الحصول عليها في الجداول هي تقريب جيد للوغاريتم 6، أما الشاشة الوسطى فتعرض كيف أن القيمة 0.7781512504 التي جرى الحصول عليها من مفتاح اللوغاريتم في الآلة الحاسبة (وهو المفتاح log) هي تقريب أفضل، في حين تعرض الشاشة الثالثة المعنى الدقيق للوغاريتم 6. في الممارسة العملية، يجري استخدام التقريب وذلك على اعتبار أن معظم اللوغاريتمات هي أرقام غير قياسية كما في هذه الحالة.



تحقق بآلتك الحاسبة كيف أن العمليتين المتعاكستين متصلتين ببعضهما البعض: الأولى رفع 10 إلى أس والثاني إيجاد الأس الذي يتم رفع 10 إليه للحصول على عدد معين. بالتالي نرى كيف أن هناك رابطا قويا بين الدالة الأسية و الدالة اللوغاريتمية. ولتوضيح ذلك، توضح الشاشتين في الأسفل العلاقة الوطيدة بين الدالتين. ادرس هاتين الشاشتين بعناية، حيث تعكس كل واحدة منهما تعريف لوغاريتم لأساس 10.



يجري وصف اللوغاريتمات ذات الأساس 10 باللوغاريتمات الإعتيادي حيث كانت تعتبر مهمة جدا لمئات السنين في إتمام العمليات الحسابية – قبل اختراع الآلات الحاسبة وأجهزة الكمبيوتر – حيث تم استخدام خصائصها من أجل بناء واستخدام قواعد الشرائح، والتي جرى استخدامها بدورها لمئات السنين.

خصائص اللوغاريتمات

لم يعد من الضروري استخدام اللوغاريتمات في الحساب، خصوصا عندما يكون لديك آلة حاسبة، إلا أن الدراسة الموجزة حول كيفية استخدام اللوغاريتمات في الماضي في العمليات الحسابية قد توضح بعض خصائص اللوغاريتمات.

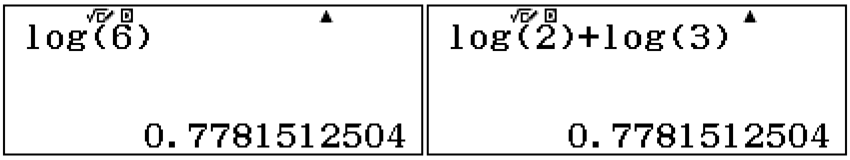
إن الخصائص الرئيسية للوغاريتمات والتي جعلت منها مفيدة للغاية في الماضي تلك التي تتبع قوانين الأسس وذلك كما هو موضح أدناه:

$$10^{3.1} \times 10^{1.2} = 10^{3.1+1.2} = 10^{4.3} \quad \text{و} \quad \left(10^{1.2}\right)^3 = 10^{1.2\times 3} = 10^{3.6}$$

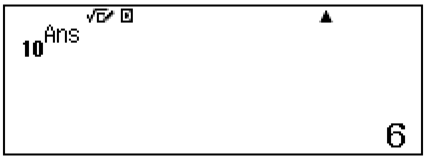
توضح هذه البيانات كيف أنه عندما يجري كتابة الأعداد كأسس لـ 10، يمكن ضربها بإضافة القوى لبعضها. وبالمثل، يمكن إيجاد أسس عدد عن طريق الضرب. من الأسهل بكثير الجمع بدلا من الضرب، ومن الأسهل الضرب بدلا من إيجاد الأسس، بالتالي وقبل عصر الآلات الحاسبة، كان تمثيل الأعداد باستخدام اللوغاريتمات أسهل حسابيا للجميع، بما في ذلك خاصة العلماء والمهندسين. (كان يجري الحصول على اللوغاريتمات من

جداول مطبوعة وليس الآلة الحاسبة طبعا. حيث جرى استخدام قواعد الشرائح للحصول على أجوبة تقريبية أيضا)

ولإعطاء مثال سهل عن هذه العملية، انظر في الشاشتين أدناه.

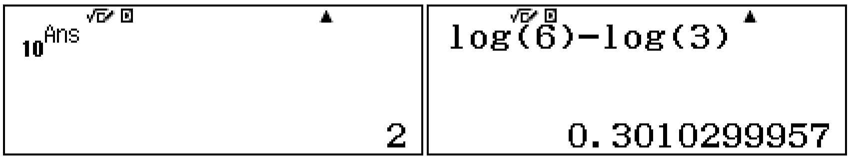


لاحظ كيف أن log 6 = log 2 + log 3 على اعتبار أنه نفس الرقم (≈ 0.778) وذلك بالرغم من أن 3 × 2 = 6 ينطوي على عملية ضرب حيث نرى هنا بأننا نحتاج إلى عملية جمع بدلا من الضرب لدى استخدام اللوغاريتمات. للحصول على نتيجة 6، من الضروري أن نكون قادرين على تحويل النتيجة من لوغاريتم (في هذه الحالة 0.778 ...) إلى عدد وهو الأمر الذي يمكن إكماله في الآلة الحاسبة باستخدام هذه النتيجة كأس كما هو مبين أدناه:

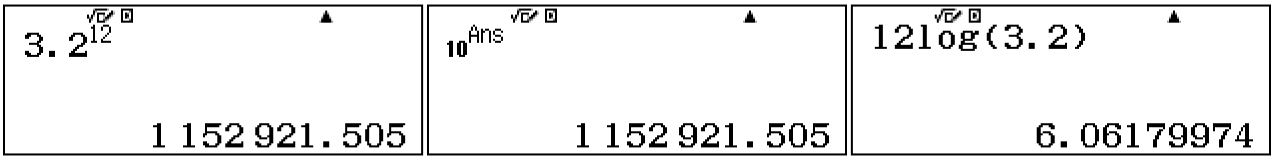


جرى تنفيذ هذه العملية في وقت سابق باستخدام كتاب الجداول وليس الآلة الحاسبة.

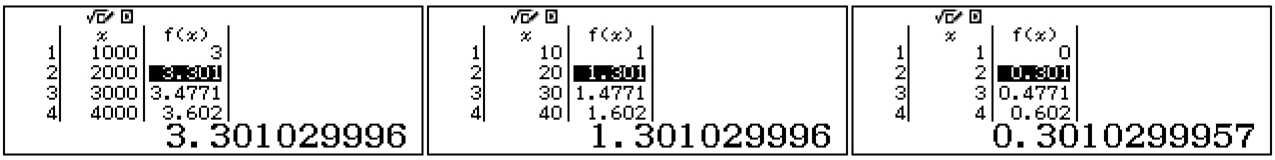
يمكن تطبيق فكرة مشابهة على التقسيم والذي يجري التعامل معه عبر طرح اللوغاريتمات من بعضها البعض لكي نبين كيف أن 2 = 3 ÷ 6 .



كان العثور على أسس وجذور الأعداد تحتوي على الضرب والقسمة أسهل بكثير باستخدام اللوغاريتمات مقارنة بالطرق الأخرى. في الشاشات أدناه على سبيل المثال، يمكن إيجاد الأس 12 لرقم عبر ضرب لوغاريتمه بـ 12 الأمر الذي يعتبر أسهل بمراحل من حساب 3.2^{12} عن طريق ضرب العدد 3.2 بنفسه 12 مرة. لكن حاليا بالطبع، غدا الأمر أسهل وذلك باستخدام الآلة الحاسبة مباشرة حيث نرى ذلك في الشاشة الثالثة أدناه.



كانت لوغاريتمات الأساس 10 تعتبر مفيدة بشكل خاص حيث قمنا بدورنا باستخدام نظام الأعداد العشرية (الذي يملك بدوره أساس 10). وتعرض الجداول أدناه بعض الأمثلة على دالة لوغاريتمية هي f(x) = log x.



لاحظ كيف أن log 20 = log 10 + log 2 = 1 + log 2، وأن log 2000 = log 1000 + log 2 = 3 + log 2. لهذا السبب، يمكن الحصول على لوغاريتمات الأرقام الكبيرة بسهولة عن طريق الحصول على لوغاريتمات

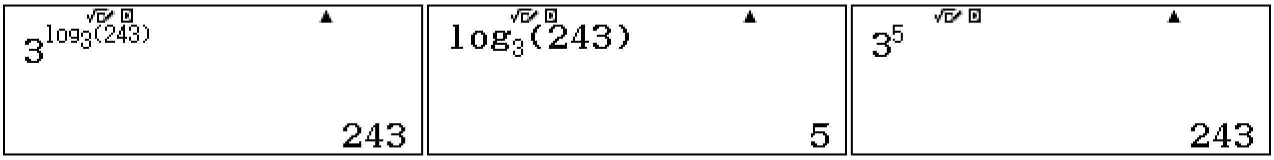
الأرقام الأقل وذلك بإضافة حد مرتبط مع الأس 10، وهذا هو السبب في قيام جداول اللوغاريتمات بإدراج الأرقام بين 1 و 10 فقط.

كما لوحظ، تعالج آلتك الحاسبة الآن العمليات الحسابية التي كانت تحتاج للوغاريتمات في الماضي. قم بإيجاد جدول لوغاريتمات قديم وتحقق بنفسك من بعض الخصائص الموضحة هنا.

لوغاريتمات لأساسات أخرى

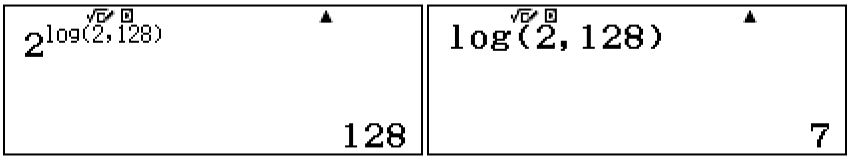
تعد فكرة اللوغاريتم فكرة متصلة بدالة الأس بشكل أساسي. بدورنا، قمنا فقط باستخدام الدوال الأسية ذات الأساس 10، إلا أنه في الوقت ذاته يمكن استخدام أي رقم آخر كأساس. للتوضيح، على اعتبار أن $3^5 = 243$، يمكننا القول بأن لوغاريتم 253 للأساس 3 هو 5، ويكتب $\log_3 243 = 5$.

يمكن الحصول على لوغاريتمات لأي أساس في الآلة الحاسبة عبر استخدام المفتاح $\log_\square\square$ (كما قد رأيت سابقا في حالة الأساس 10). ادخل أساس اللوغاريتم ثم اضغط ▶ لإدخال الرقم المعني وذلك قبل الضغط على = للحصول على النتيجة:



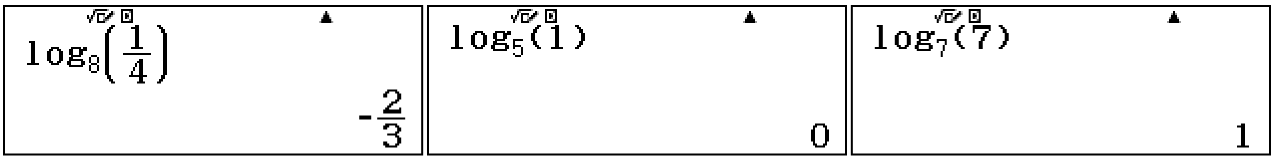
توضح الشاشة الأخيرة أعلاه العلاقة بين لوغاريتم لأساس معين، ودالة أسية بنفس الأساس مشابهة للعلاقة للأساس 10.

تتوفر الوغاريتمات بأساسات أخرى أيضا، وذلك باستخدام مفتاح لوغاريتم آخر هو SHIFT (−) . حيث قمنا حتى الآن باستخدام هذا الأمر من أجل الحصول على لوغاريتمات من للأساس 10، ولكن تتوفر هناك لوغاريتمات لأساسات أخرى عبر كتابة الأساس متبوعا بفاصلة (يجري الحصول عليها عبر الضغط على SHIFT ( )) كما هو مبين أدنا من أجل الحصول على $\log_2 128 = 7$:



(عندما لا يجري إدخال أي أساس، يجري الافتراض بأنه 10). كلا الطريقتين تنتجان نفس النتيجة، وذلك بالرغم من أن استخدام المفتاح $\log_\square\square$ أسرع. ويعود اختيار الطريقة في النهاية لك.

لاحظ أيضا، أنه ومن أجل أي أساس موجب، سيكون لوغاريتم الأساس نفسه هو دائما 1، ولوغاريتم 1 هو دائما 0 (لأن أي أساس مرفوع إلى القوى 0 تساوي 1) ولوغاريتم عدد موجب أقل من 1 هو عدد سالب. فيما يلي ثلاثة أمثلة حول تلك الخصائص.



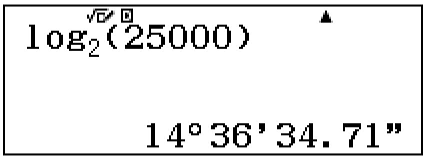
نقترح عليك محاولة تجربة أمثلة أخرى بنفسك للتحقق من هذه الخصائص. تحقق أيضا من عدم إمكانية إيجاد لوغاريتمات لأعداد سالبة أو لوغاريتمات لأساسات سالبة، على اعتبار استحالة تعريف هذه القيم رياضيا.

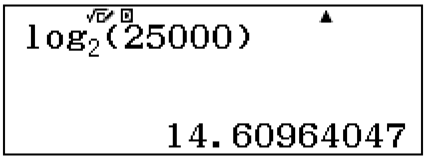
توفر اللوغاريتمات أداة قوية في حل بعض المشاكل العملية، مثل تلك المقترحة في حالة البكتيريا وسكان المملكة العربية السعودية أعلاه. من أجل معرفة متي يمكن أن يصل تعداد البكتريا إلى مليون يتضمن حل المعادلة الأسية السابقة:

$$40 \times 2^x = 1\,000\,000$$

أو $2^x = 25\,000$

يمكنك التفكير في هذه المسألة باستخدام اللوغاريتمات لأساس 2، حيث حل (x) هو لوغاريتم 25,000 لأساس 2 . يسمح لك أمر $\log_{\square}\square$ في الآلة الحاسبة بتحديد ذلك بسهولة:





سيكون الحل حوالي 14 ساعة و36 دقيقة. تعد هذه الطريقة أسهل بكثير من الحل السابق المعتمد على استخدام الجدول. (لاحظ كيف جرى تحويل 14.61 لساعات ودقائق وثواني وذلك عبر استخدام مفتاح °’’’ الذي تعرفت عليه في الوحدة 4 وذلك بالرغم من أن الدقة المفرطة غير مطلوبة هنا في النموذج المستخدم).

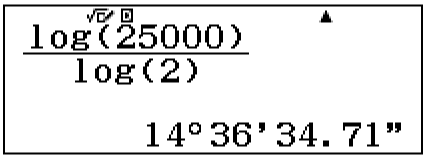
هناك طريقة أخرى لحل معادلات مثل $2^x = 25\,000$ تتضمن إيجاد لوغاريتمات كل جانب من جانبي المعادلة (باستخدام خواص اللوغاريتمات والتي هي$\log a^b = b \log a$).

$$\log (2^x) = \log 25\,000$$

$$x \log 2 = \log 25\,000$$

بالتالي $x = \frac{\log 25000}{\log 2}$

وكما نرى، فإن هذه النتيجة هي نفسها التي حصلنا عليها في وقت سابق وذلك بالرغم من أن الحصول عليها كان مرهق بعض الشيء.

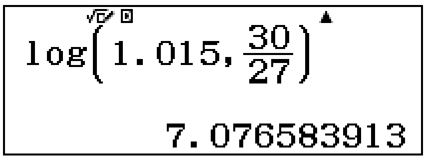


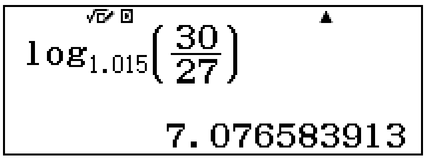
وللعثور على متى سيصل سكان المملكة العربية السعودية لـ 30 مليون نسمة، سنقوم بحل المعادلة الأسية:

$$f(x) = 27 \times 1.015^x = 30$$

أي أن $1.015^x = \frac{30}{27}$

يمكنك التفكير في هذه المسألة باستخدام اللوغاريتمات، حيث تبين المعادلة كيف أن القيمة المطلوبة هي لوغاريتم 30/27 إلى الأساس 1.015. تتيح لك الآلة الحاسبة العثور على هذه القيمة مباشرة، كما هو مبين أدناه، وذلك باستخدام أي من أوامر اللوغاريتم الاثنين.





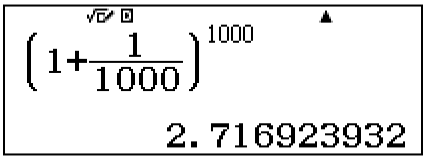
بالتالي، من المتوقع أن يصل سكان المملكة العربية السعودية إلى 30 مليون نسمة خلال تقريبا 7 سنوات من عام 2014 (أي عند سنة 2021). أيضا، يعتبر هذا الحل أسهل من استخدام جدول قيم الدالة الأسية بالطريقة الموضحة سابقا.

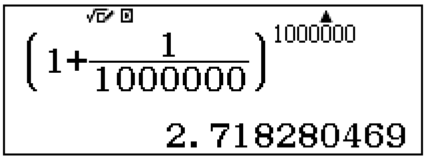
e واللوغاريتمات الطبيعية

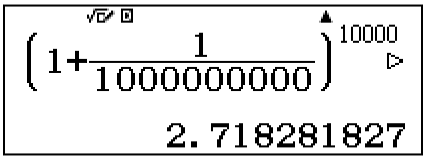
تشمل العديد من الدوال الأسية العدد الثابت *e*، وهو عدد غير نسبي يمكن تعريفه بعدد من الطرق، من ضمنها قيمة النهاية، عندما تصبح *n* عدد لا نهائي، للمقدار

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

تعرض الشاشات الثلاث في الأسفل كيف أنه ومع زيادة مقدار *n*، تبدو القيمة أقرب بشكل بطيء إلى القيمة المقبولة لـ .... $e \approx 2.718281828459$



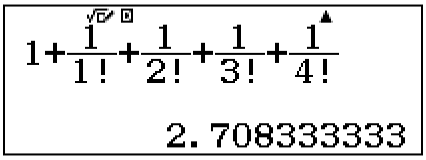


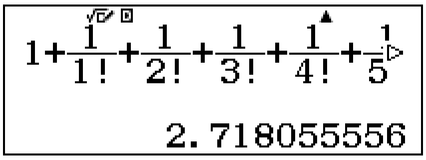


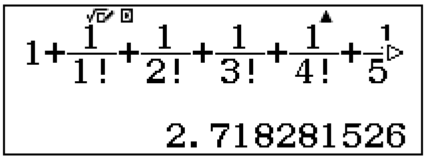
كما أن هناك طريقة أخرى لتحديد e وهي عبر المتسلسلة اللا نهائية:

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots$$

يمكنك الحصول على تقريب لـ e باستخدام عدة حدود من المتسلسلة في آلتك الحاسبة وذلك كما هو مبين أدناه (يجري الحصول على الأمر $x!$ عبر الضغط على SHIFT x^{-1}):

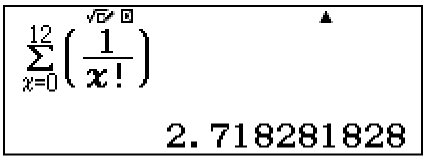




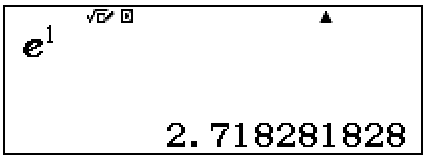


على الرغم من أنها قد تبدو متشابهة، تقوم هذه الشاشات بحساب أول 4 و 6 و 9 حدود على التوالي من المتسلسلة. حيث تُظهر كيف أن المتسلسلة تقترب أكثر من القيمة المقبولة لـ e بسرعة كبيرة (الأمر الذي يعني بأننا لا نحتاج لاستخدام حدود كثيرة للغاية).

سوف نرى في الوحدة 14 طرقا أكثر كفاءة في تقييم المتسلسلات مثل هذه عبر استخدام أمر واحد فقط كما هو موضح في الأسفل. يعتبر هذا أسهل بكثير من إدخال الحدود بالتوالي. ومع إدخال 12 حدا أو أكثر، ستصل المتسلسلة إلى نفس النتيجة كما هو معروض في الأسفل وفي حدود قدرة العرض لشاشة الآلة الحاسبة.



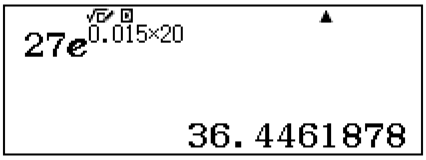
يعتبر العدد الثابت e مهما لدرجة أن قيم الدالة الأسية $f(x) = e^x$ متوفرة بشكل مباشر في الآلة الحاسبة باستخدام زر ($e^{\blacksquare}$) ، والذي يمكن الحصول عليه عبر استخدام SHIFT ln. في الواقع، تستخدم الآلة الحاسبة متسلسلة مثل تلك التي في الأعلى من أجل حساب هذه الدالة. عندما $x = 1$، فإن قيمة e تعطى:



يتم استخدام العدد e بشكل واسع في الرياضيات. من الأمثلة الجيدة على هذا الأمر يتضمن إنشاء نماذج للتغير المستمر، والتي يجري تقريبها بعمليات النمو و التحلل الطبيعية. إذا زادت كمية P الأولية أو تحللت باستمرار بمعدل سنوي هو r، بالتالي فإن كمية f(t) بعد t سنة معطاة بالعلاقة:

$$f(t) = Pe^{rt}$$

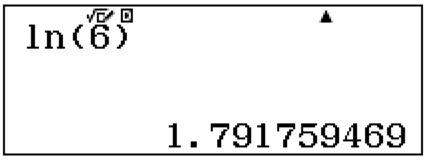
وبالعودة إلى المثال المتعلق بسكان المملكة العربية السعودية السابق يكون المعدل السنوي r هو 1.5% = 0.015. بالتالي يتطلب نموذج النمو المستمر P = 27، r = 0.015. وفقا لهذا النموذج، يظهر على الشاشة أن تعداد السكان بعد 20 عاما سيكون 36.4 مليونا، والتي هي قريبة من القيمة المعطاة في وقت سابق.

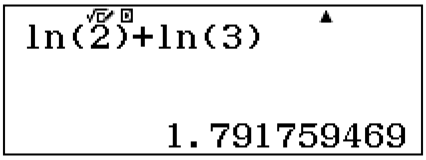


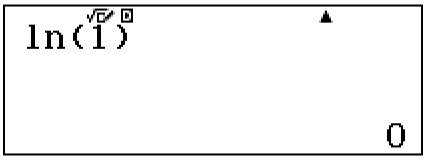
لا تعتبر النتائج متطابقة لأن النمو السكاني في المملكة العربية السعودية ليس مستمرا، على الرغم من أنه تقريب قريب جدا منه.

وتعد اللوغاريتمات المستندة إلى الأساس e مهمة أيضا في العديد من التطبيقات الرياضية، لذلك هي متوفرة مباشرة على الآلة الحاسبة مع المفتاح ln. حيث يرمز الاختصار "1n" إلى "اللوغاريتم الطبيعي وهو ما يدعى به اللوغاريتم إلى الأساس e.

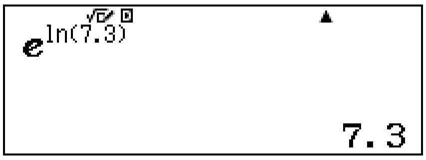
تملك الوغاريتمات الطبيعية العديد من الخصائص المتشابهة كما هو حال اللوغاريتمات الأخرى المشار إليها سابقا. وهنا بعض الأمثلة:

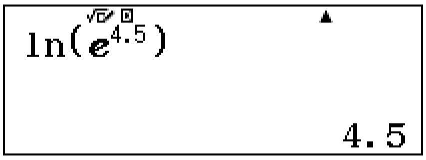




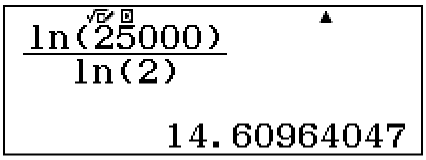


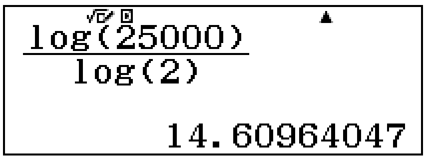
تبين الشاشتين التاليتين كيف أن الدالة الأسية الطبيعية هي معكوس للدالة اللوغاريتم الطبيعية (على غرار الوضع بالنسبة لـ 10 مع اللوغاريتم المعتاد):

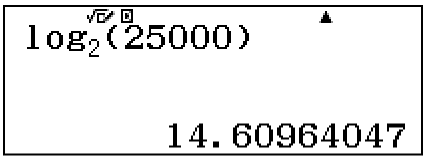




وبالمثل، فإن علاقة اللوغاريتمات إلى أساسات أخرى جرى التحدث عنها سابقا، من أجل إيجاد $\log_2 25000$ ، هي نفسها من أجل كل من اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات المعتادة:

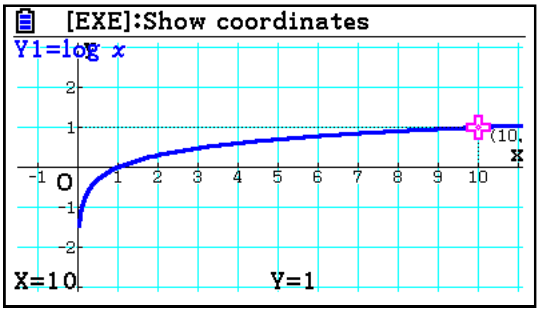


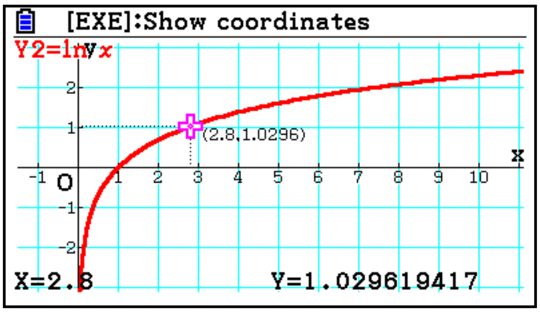




لاحظ أن كل من الإجراءات الثلاثة الموضحة هنا يعطي نفس النتيجة.

أخيرا، تبدو الرسوم البيانية للدوال اللوغاريتمية متشابهة لكل من اللوغاريتمات المعتادة والطبيعية، كما هو مبين أدناه، وذلك باستخدام الرسوم البيانية في الآلة الحاسبة البيانية CASIO fx-CG20.





في كل حالة، يمر كلا المنحنيين البيانيين بالنقطة (1،0)، وكلاهما له قيم سالبة من أجل $x < 1$ وكلاهما غير معرف من أجل $x < 0$. كما أن كلا الرسمين يملكان ميل موجب يتناقص مع تزايد x. وكل منحنى هو انعكاس حول y = x للدالة العكسية $f(x) = e^x$ و $f(x) = 10^x$ على الترتيب.

استخدم الآلة الحاسبة لاستكشاف ومقارنة هذه الخصائص من خلال جداول القيم. مثلا، ادرس الجداول أدناه والتي تعرض بعض القيم من أجل $f(x) = \ln x$ و$g(x) = \log x$ المتوافقة مع الرسوم البيانية أعلاه. لاحظ كيف أن اللوغاريتمات معرفة فقط للأعداد الموجبة و $\ln 1 = \log 1 = 0$.

	x	f(x)	g(x)
2	8	2.0794	0.903
3	9	2.1972	0.9542
4	10	2.3025	1
5	11	2.3978	1.0413

1

	x	f(x)	g(x)
1	2.7	0.9932	0.4313
2	2.8	1.0296	0.4471
3	2.9	1.0647	0.4623
4	3	1.0986	0.4771

1.029619417

	x	f(x)	g(x)
1	0	ERROR	ERROR
2	0.5	-0.693	-0.301
3	1	0	0
4	1.5	0.4054	0.176

-0.3010299957

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة.

1. أوجد $\sqrt[5]{27}$.

2. أوجد $13^{\frac{7}{9}}$.

3. a) اكتب $16^{\frac{3}{4}}$ بطريقتين منفصلتين مستخدما في كل واحدة منها إشارة الجذر (√). تحقق من أنها كلها تؤدي إلى نفس النتيجة العددية.

b) أوجد $16^{\frac{3}{4}}$ مباشرة على الآلة الحاسبة وتحقق من أن النتيجة هي نفسها مثل الجزء a)

4. يتضاعف تعداد خلية كل يوم. بالتالي يكون تعداد الخلايا بعد x يوم معطى بالعلاقة: $P(x) = 60 \times 2^x$
a) ما هو التعداد الإبتدائي؟

b) ما هو عدد الخلايا بعد 12 يوم؟

c) بعد كم يوم سيصل عددها إلى 2 مليون خلية؟

5. أي من النموذجين الأسيين التاليين يملك معدل زيادة أسرع: $f(x) = 3 \times 4^x$ أو $g(x) = 12 \times 3^x$؟

6. تملك مدينة صينية تعداد سكان مقداره 2.1 مليون نسمة ونسبة نمو سكاني هي 1.8% سنويا.

a) اكتب التعداد السكاني السنوي في شكل نموذج أسي.

b) استخدم جدول القيم أو الأمر CALC لإيجاد التعداد المتوقع للمدينة بعد 10 و20 و 30 و40 عام من الآن.

7. a) أوجد $\log_{10}81$ و $\log_{10}9$.

b) فسر لماذا $\log_{10}9 < 1$.

c) فسر لماذا $\log_{10}81$ هي ضعف $\log_{10}9$.

8. أوجد a) $10^{0.6}$.

b) $10^{\log 2\pi}$

9. أوجد a) $\log\frac{9}{5}$

b) اكتب $\log\frac{9}{5}$ كناتج فرق لوغاريتمين، واستخدم هذا من إجابتك في الجزء a).

10. أوجد a) $\log_4 7$ و$\log_4 28$.

b) فسر العلاقة بين القيمتين المتحصل عليهما في القسم a)

11. أوجد $\log_{16}1$.

12. قم بحل المعادلة $3^x = 143$ مستخدما مفتاح $\log_{\blacksquare}\square$.

13. a) أوجد $\log 5$ و$\ln 5$.

b) أي القيمتين السابقتين أكبر؟ فسر لم يجب أن تكون الأكبر.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. a) استخدم جدول القيم من أجل مقارنة النموذجين الأسيين $f(x) = 0.8^x$ و$g(x) = 1.25^{-x}$

b) فسر العلاقة بين هذين النموذجين.

c) أوجد نموذجين أسيين إضافيين مرتبطان بنفس الطريقة المرتبطة بها هذين.

2. يمكن استخدام الدالة $m = 1000 \times 1.029^{-t}$ من أجل إنشاء نموذج تحلل إشعاعي من كيلوغرام واحد من البلوتونيوم. في النموذج، m هي عدد غرامات البلوتونيوم الباقية و t مقاسة بآلاف السنين.

a) كم كيلوغراما متبقية من البلوتونيوم بعد عشرة آلاف سنة.

b) قم بعمل جدول قيم لرؤية كم سيبقى من البلوتونيوم بعد كل 5000 سنة حتى الوصول إلى 40,000 سنة. ما هي مدة "نصف الحياة" التقريبية للبلوتونيوم؟ (والتي هي، بعد كم سنة ستتحلل نصف الكتلة الخاصة بهذه المادة)؟

c) يقوم مفاعل نووي نموذجي ذي قدرة 1,000 ميغاواط بإنتاج 230 كغ من البلوتونيوم كل عام. ما هي كمية البلوتونيوم المتبقية إذا جرى وضعها في بركة تبريد لمدة 40 سنة؟

3. يقدّر عدد سكان العالم P (بالمليار) في القرن العشرين كما في الجدول أدناه:

السنة *t*	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
التعداد *P*	1.65	1.75	1.86	2.07	2.30	2.56	3.04	3.71	4.46	5.28	6.08

ويمكن نمذجة تعداد السكان P (بالمليار) بالدالة الأسية التالية: $P = 8.7 \times 10^{-12} \times e^{0.0136t}$ في سنة t.

a) استخدم CALC أو جدول القيم من $t = 1900$ لتحديد كيف يطابق هذا النموذج البيانات المعطاة.

b) ما هي تنبؤ النموذج لعدد السكان هذه السنة.

c) متى يتنبأ النموذج بأن يصل عدد السكان إلى 8 مليارات نسمة؟

4. a) كيف هي اللوغاريتمات المعتادة للأعداد مقارنة باللوغاريتمات لمربعات الأعداد؟ جرب أمثلة لرؤية العلاقة (مثلا log 7 و log 49 وبين log 13 و log 169 وبين log 10 و log 100)؟

b) قم بمقارنة لوغاريتمات الأرقام مع لوغاريتمات مكعباتها.

c) ما هو تأثير أخذ اللوغاريتمات إلى أساس آخر في الجزأين a) و b)؟ على سبيل المثال كيف يؤدي لوغاريتم إلى أساس 4 لاعداد مقارنة إلى لوغاريتمات إلى أساس 4 مع تربيع الاعداد؟

5. لدينا عالم أحياء دقيقة يقوم بدراسة نمو فيروس. قم بالنظر للبيانات الأسية التالية لعدد الخلايا (y) في حضارة ما على فترة x يوم.

يوم *x*	1	2	3	4	5
خلية *y*	15	46	134	400	1220

a) استخدم الرسم البياني من أجل رسم y في مقابل x. ما هو شكل هذا المنحنى؟

b) استخدم الرسم البياني من أجل رسم log y في مقابل x. ما الذي تغير في شكل هذا المنحنى؟

c) استخدم الرسم البياني من أجل رسم $\log_3 y$ في مقابل x. صف شكل المنحنى.

d) استخدم الرسم البياني من أجل اقتراح العلاقة بين x و y.

5. أنشئ بعض جداول القيم لمقارنة الدوال اللوغاريتمية مثل. $f(x) = \log_a x$ من أجل أساسات مختلفة (a) ومن أجل $0 < x < 10$. استخدم على الأقل ثلاث أساسات مختلفة. قارن بعض هذه الجداول للأجابة على الأسئلة التالية:

   a) من أجل أي قيمة لـ x تملك كل الدوال نفس القيمة؟

   b) من أجل أي قيمة لـ x، كل قيم الدالة f(x) سالبة؟

   c) من أجل أي قيمة لـ a تتزايد قيم f(x) بشكل سريع للغاية؟

قد ترى أنه من المفيد لك استخدام جداول القيم لرسم بعض الرسوم البيانية بشكل أسرع.

ملاحظات من أجل المعلمين

يسلط هذا النموذج الضوء على الطريقة التي يمكن فيها لآلة الحاسبة كاسيو *ClassWiz* دعم الطلاب من أجل فهم الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث تستفيد الوحدة من وضع الجدول والمفاتيح الأسية واللوغاريتمية المتنوعة. يجب على الطلاب قراءة هذه الوحدة ومساعدتهم على رؤية كيفية استخدام هذه الآلة الحاسبة من أجل معاينة أنواع الدوال المختلفة. وبينما يجب على الطلاب القيام بالتمارين بأنفسهم، من الأفضل القيام بها مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة النتائج معا والتعلم من بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. 1.933   2. 7.352   3. a) $\sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 8$ 4. a) 60   b) 245,760

c) حوالي 15   5. $f(x)$ 6. a) $P(x) = 2.1 \times 1.018^x$

b) (مليون) 2.51, 3.00, 3.59, 4.29   7. a) 1.908, 0.954

b) $\log_{10}9 < \log_{10}10$ و $\log_{10}10 = 1$ c) $\log_{10}81 = \log_{10}9^2 = 2\log_{10}9$

8. a) 0.6   b) 2π 9. a) 0.255   b) $\log 9 - \log 5$ 10. a) 1.404, 2.404

b) $\log_4(7\text{x}4) = \log_4 7 + \log_4 4 = \log_4 7 + 1$ 11. 0   12. $\log_3 143 \approx 4.517$

13. a) 0.699, 1.609   b) ln 5 أكبر لأن أساس اللوغاريتم أصغر.

النشاطات

1. يجذب هذا النشاط الانتباه إلى طريقتين مختلفتين في تمثيل التحلل الأسي: الأولى عبر مؤشر سلبي (بأساس أكبر من 1) أو بمؤشر إيجابي بأساس أقل من 1. يجب على الطلاب المرتاحين بالقوانين أن يكونوا قادرين على تفسير لم هذه البدائل تعطي نفس الحل في هذه القضية بشكل عام. [الإجابات: a) كلا الجدولين هما نفس الشيء. b) كلا النموذجين هما ذات الشيء. c) يمكن إيجاد الأزواج الأخرى عبر اختيار أساسات هي مقلوب بعضها البعض].

2. يعتبر التحلل الإشعاعي من التطبيقات المهمة في الدوال الأسية. يمكن للطلاب الإجابة على هذه الأسئلة عبر استكشاف جدول، وذلك بالرغم من قدرة بعض الطلاب المتقدمين على الإجابة على الجزء b) باستخدام

$\log_{1.029}0.5$. يجب الانتباه هنا والتذكر بأن t مقاسة بآلاف السنين. قد يساعد الرسم البياني الطلاب على إختيار التحلل [الإجابات: a) 751.4 غرام b) حوالي 24,200 سنة c) 229.7 كغ]

3. تعتبر نماذج تعداد السكان من الأمثلة المهمة على الدوال الأسية. يستخدم المثال e من أجل البرهنة على التطبيق الواسع له. قم بالمناقشة مع الطلاب الافتراضات الكامنة وراء هذا النوع (وبخاصة الافتراض "الخاطئ" بأن أنماط النمو تبقى نفسها مع مرور الوقت). لا يتوافق النموذج مع البيانات، لكنه يوفر إحساسا مهما بالتغير. يمكن الحصول على نماذج مشابهة – خاصة بالبلدان التي ينتمي لها الطلاب – عبر الولوج إلى شبكة الإنترنت. [الإجابات: b) يتنبأ النموذج بوصول العدد إلى 6.93 بحلول عام 2015، وهو الأمر المنخفض نوعا ما. c) نهاية عام 2025].

4. يدعو النشاط هذا الطلاب إلى استكشاف علاقة القوى والتي هي بشمل عام $\log x^k = k \log x$, تبقى هذه العلاقة ثابتة وذلك بغض النظر عن أساس اللوغاريتم. [الإجابات: a) لوغاريتمات المربعات هي ضعف لوغاريتمات الأرقام الأصلية. b) لوغاريتمات المكعبات هي 3 أضعاف لوغاريتمات الأرقام. c) نفس الشيء من أجل كل الأساسات].

5. يتطلب هذا النشاط من الطلاب رسم نقاط على الرسم البياني. يجب هنا الانتباه في اختيار المقياس النسبي للرسم وبخاصة من أجل الجزء .a) يجب على الطلاب رؤية وجود التأثير الخطي المنبثق عن إستخدام التحويلات اللوغاريتمية، والذي يدعم النماذج الأسية في الإحصاء وهي أساس ورقة الرسم البياني لشبه اللوغاريتم. سيحتاج معظم الطلاب للمساعدة في هذه الجزء d). [الإجابة: a) أسية b) خطية c) خطية مع منحدر = 1 d) علاقة قريبة من $y = 5 \times 3^x$ حيث ربما هذه الطريقة الأسهل لرؤية المنحنى b) والذي يعرض كيف أن $\log_3 y \approx 1.46 + x$]

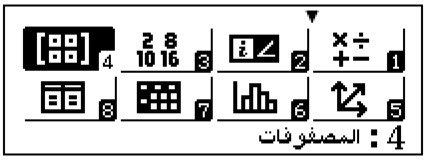
6. قد يكون من الأسهل للطلاب رسم بعض الرسوم البيانية هنا لكونها أسهل تأويلا من الجداول ويمكن عمل سجل للمقارنات. [الإجابات: a) من أجل $x = 1$ فإن $f(x) = 0$ b) $0 < x < 1$ c) كلما كانت قيمة a أصغر، كلما زاد الانحدار.

الوحدة السابعة
المصفوفات

تعتبر المصفوفات مفيدة جدا في الرياضيات وذلك من أجل تمثيل المعلومات مثل أنظمة المعادلات أو مجموعة نقاط و القدرة على معالجة المعلومات. يتطلب هذا النموذج استخدام نمط المصفوفات الذي يمكن الوصول إليه بالنقر على MENU 4 في الآلة الحاسبة كاسيو ClassWiz.

تعريف المصفوفات

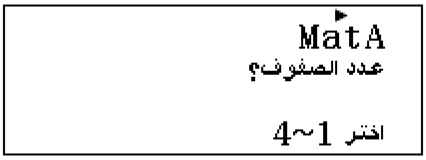
المصفوفة هي مجموعة مستطيلة من الأرقام منتظمة بشكل صفوف وأعمدة. تسمح لك الآلة الحاسبة بتعريف ما يصل إلى أربعة مصفوفات منفصلة، تسمى A، B، C و D. يمكن أن تحتوي كل مصفوفة على 1، 2، 3، 4 أعمدة و 1، 2، 3، 4 صفوف. عند الدخول إلى نمط المصفوفات، يجب عليك اختيار أي مصفوفة ترغب في تعريفها، وذلك كما هو موضح أدناه.

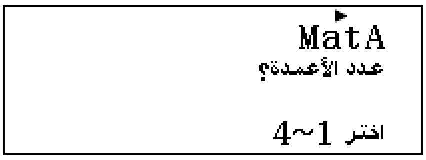


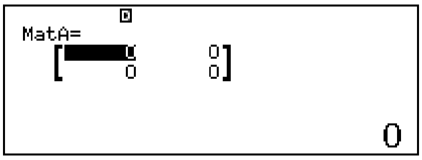
اضغط على 1 لتعريف المصفوفة A وتكتب اختصارا MatA في الآلة الحاسبة و في هذه الوحدة، سنرمز لها اختصارا بالحرف الغامق **A**. من أجل تعريف مصفوفة ما، يجب تحديد أبعادها (أو مقاسها)، يتبع ذلك طلب الآلة الحاسبة تحديد عدد الصفوف والأعمدة. من المتعارف عليه، يجب تحديد الصفوف أولا، بالتالي فإن مصفوفة 2 x 3 هي مصفوفة تملك ثلاثة صفوف وعمودين. تملك هذه المصفوفة المربعة أبعاد 2 × 2:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

من أجل إدخال هذه المصفوفة في الآلة الحاسبة، قم في البداية بتحديد A على أنها مصفوفة 2 × 2:

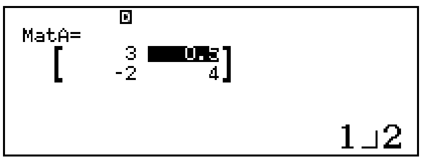






ادخل معاملات المصفوفة ضمن المصفوفة الفارغة مع النقر على = بعد كل معامل. يمكنك استخدام مفاتيح المؤشر للانتقال من خلية إلى أخرى في المصفوفة لتصحيح الأخطاء أو لتغيير المعاملات.

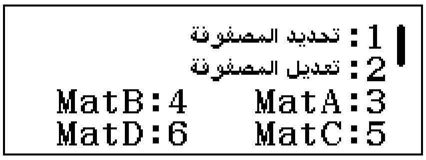
إذا كنت تريد إدخال كسر في خلية، قم بالنقر على البسط، ثم مفتاح ▭/▭ ومن ثم المقام. على سبيل المثال، تعرض الشاشة في الأسفل العنصر الثاني في الصف الأول، $A_{12} = ½$



لاحظ كيف أن قيمة العنصر المظلل معروضة في الجزء السفلي من الشاشة.

عند الانتهاء من تحديد المصفوفة، اضغط AC.

لتعريف مصفوفات أخرى، أو لتغيير القيم في مصفوفة، أختر القائمة OPTN .

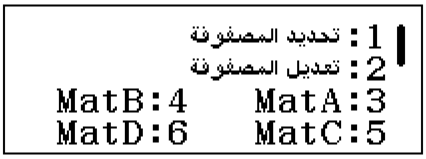


لتغيير أبعاد المصفوفة، ستحتاج إلى تعريفها من جديد. اضغط AC عند الانتهاء.

لاحظ أنه في حال خرجت من نمط المصفوفات، سيجري حذف أي مصفوفات كانت موجودة مسبقا.

العمليات على المصفوفات

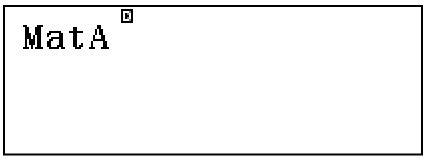
عندما يتم تعريف المصفوفات، يمكن إسترجاعها وإجراء العمليات الحسابية المتنوعة عليها باستخدام الآلة الحاسبة. ويمكن القيام بكل ذلك عبر مفتاح OPTN . (انقر على ▲ ثم ▼ للتنقل بين صفحات القائمة).

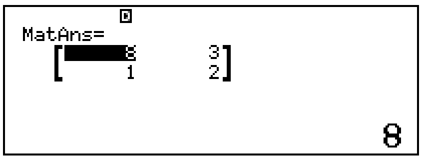


في هذه الوحدة، سيتم تمثيل المصفوفات بأحرف بخط عريض (A وB وC وD). ومن أجل شرح العمليات الحسابية على مصفوفة، قم بإدخال المصفوفات التالية في آلتك الحاسبة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 9 \\ 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

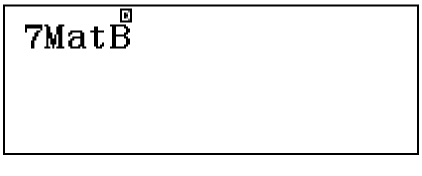
لعرض مصفوفة (سواء أكانت A، B، C أو D)، قم باختيارها من قائمة OPTN ومن ثم انقر على ≡، (تعرض الشاشة الأولى في الأسفل الآلة الحاسبة قبل النقر على ≡، بينما تعرض الثانية النتيجة بعد النقر على ≡).

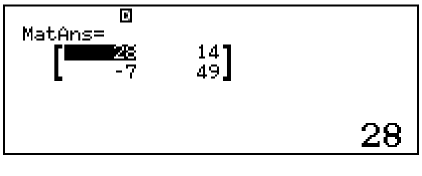




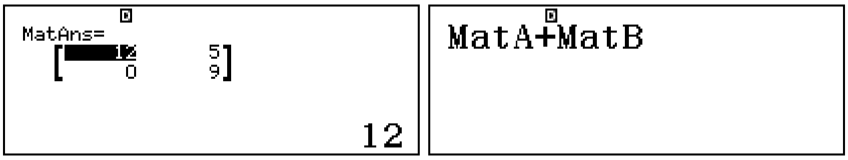
لاحظ أنه، بالنسبة للآلة الحاسبة نفسها، تظهر نتيجة العملية الحسابية الأخيرة التي جرت للمصفوفة على أنها *Ans*. ويمكن استعادة هذه النتيجة باستخدام أمر *MatAns* وذلك عن طريق النقر على 1 في الصفحة الثانية من القائمة OPTN

يمكن مضاعفة أعداد المصفوفة كلها عبر ضربها بعدد، ويجري ضربه بكل عناصر المصفوفة (ويسمى *Scalar* لكونه عدد مفرد وليس مصفوفة). يعتبر من المقبول (لكن ليس من الضروري) إدخال علامة ضرب من أجل المضاعفات العددية، حيث تعرض الشاشة الموجودة في الأسفل نتيجة ضرب B بالعدد 7 للحصول على مصفوفة جديدة هي 7B:





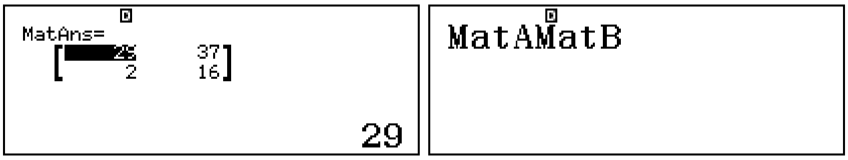
يمكن القيام بعمليات جمع وطرح لمصفوفتين في حالة كانتا تملكان نفس الأبعاد (مثل المصفوفتين A و B في الأعلى اللتان تملكان نفس الأبعاد). سيؤدي هذا الأمر لإنتاج مصفوفة جديدة فيها كل عنصر جديد هو نتيجة جمع (أو طرح) عناصر المصفوفتين الأصليتين. على سبيل المثال، لاحظ أدناه كيف أن 8 + 4 = 12 و 2 + 7 = 9:



أما بالنسبة للمصفوفات التي لا تملك نفس الأبعاد، فلا يمكن القيام بعمليات الجمع أو الطرح لأنه سوف يؤدي إلى حدوث خطأ في الأبعاد على اعتبار إن هناك بعض العناصر في المصفوفة الأولى لا يقابلها عناصر من المصفوفة الثانية. تحقق من هذا بنفسك باستخدام الآلة الحاسبة للعثور على A + C.

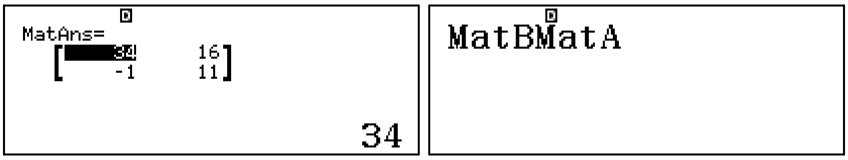
وبالمثل، تجري عملية ضرب مصفوفاتان عندما يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مماثلا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية، حيث نحصل على العنصر الأول في المصفوفة الجديدة AB من ضرب الصف الأول من A بالعمود الأول من B ومن ثم يجري إضافة النتائج:

$$8 \times 4 + 3 \times -1 = 29$$

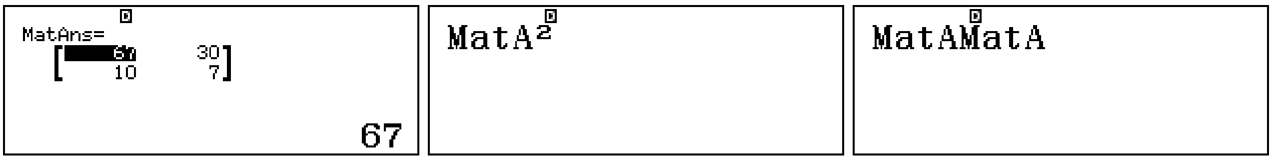


وبشكل مشابه، يتم الحصول على AB_{12} بضرب الصف الأول من A بالعمود الثاني من B. تحقق من المدخلات الثانية بنفسك عبر القيام بذلك يدويا.

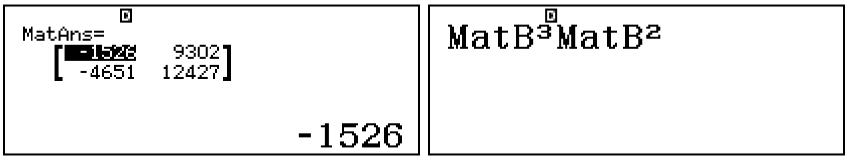
يمكن كتابة مصفوفة الضرب باستخدام إشارة الضرب، على الرغم من أن ذلك ليس ضروريا. لاحظ من النتيجة الموجودة في الأدنى أن عملية ضرب المصفوفات ليست تبادلية؛ أي أن المصفوفة الناتجة AB لا تساوي المصفوفة الناتجة BA.



يمكن ضرب مصفوفة مربعة بنفسها بسهولة (على اعتبار أنها تملك نفس عدد الصفوف والأعمدة) حيث يمكنك استخدام أمري x^2 و x^3 (والأخير يمكن الحصول عليه عن طريق SHIFT x^2) من أجل إيجاد مربع ومكعب مصفوفة مربعة. حيث نرى في الأسفل طريقتين من أجل إيجاد المصفوفة A^2 حيث جرى استخدام الثانية باستخدام المفتاح x^2.



لاحظ عدم إمكانية استخدام مفتاح الأس $x^{\blacksquare}$ لهذا الغرض (لا يتضمن هذا قيام الآلة الحاسبة بضرب أي شيء بنفسه، بل قيامها باستخدام عمليات حسابية مختلفة باستخدام اللوغاريتمات). إن كنت ترغب في الحصول على أسس لمصفوفة أعلى من القوى الثالثة، يمكنك القيام بذلك عبر مجموعة من عمليات التربيع والتكعيب لهذه المصفوفة للوصول للأس الذي تريده. توضح الشاشة في الأسفل كيف وصلنا للأس الخامس لمصفوفة B (B^5).



معكوس المصفوفة

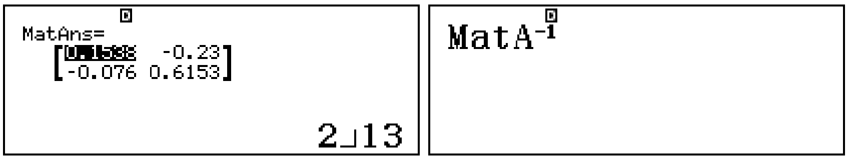
على عكس الأعداد العادية، لا تجري عملية تقسيم المصفوفة بشكل مباشر. بدلا من ذلك، يجري استخدام معكوس المصفوفة" (Matrix Inverse). كما يمكن القيام بذلك فقط في المصفوفات المربعة (أي تلك التي تملك نفس أعداد الصفوف والأعمدة). يمكنك التفكير بذلك بشكل مشابه لعملية تقسيم الأعداد. على سبيل المثال، $7 \div 8 = 7 \times 8^{-1}$حيث أن المعكوس الضربي لـ 8، هو العدد 8^{-1}، وهو الرقم الذي تحتاج لضربه بـ 8 للحصول على العدد 1، وهو العنصر المحايد لعملية الضرب:

$$8 \times 8^{-1} = 1.$$

بطريقة مماثلة، فإن معكوس المصفوفة A (والمتمثل بـ A^{-1}) يملك خاصية مشابهة باستخدام مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) والتي تتألف من 1 للعناصر القطرية و 0 في ما عدا ذلك:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

يمكن الحصول على معكوس مصفوفة مربعة على الآلة الحاسبة باستخدام مفتاح المعكوس $\boxed{x^{-1}}$ للأعداد وذلك كما هو مبين أدناه:

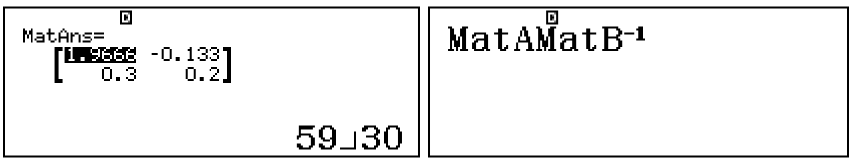


إذا قمت بتحريك المؤشر إلى عناصر A^{-1} المختلفة، ستراها ككسور كما هو مبين في الأسفل. في هذه الحالة الخاصة، تحقق بنفسك أن

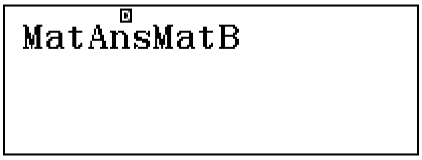
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{8}{13} \end{bmatrix}$$

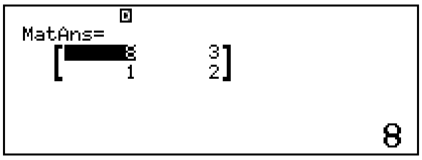
كما تحقق بنفسك كيف تعمل خاصة "العكس" باستخدام الآلة الحاسبة لترى كيف أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ حيث ترمز I إلى مصفوفة الوحدة.

بالتالي، للحصول على A÷B ، نحن بحاجة إلى استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد AB^{-1}، كما هو مبين أدناه:

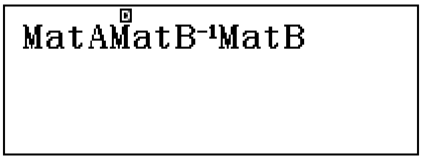


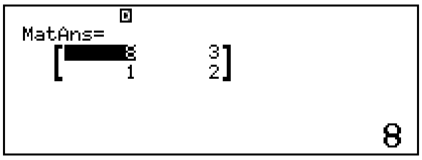
وبنفس الطريقة فإن ضرب 8÷7 بـ 8 (أي 8x 8÷7) سيعطينا العدد 7 نفسه؛ بالتالي ضرب AB^{-1} بـ B سوف يعطينا A من جديد. يمكنك رؤية هذا بضرب النتيجة السابقة في الأعلى بـ B وذلك كما هو مبين أدناه. لاحظ كيف أن الآلة الحاسبة تستخدم *MatAns* في هذه الحالة:





يمكنك أن ترى أيضا كيف أن $AB^{-1}B = AI = A$ عن طريق إدخال كل الحسابات على شاشة جديدة:



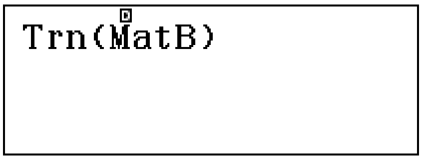


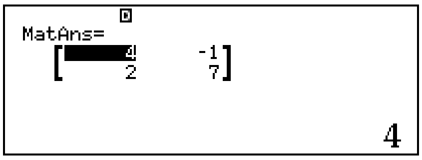
لاحظ أنه على اعتبار أن ضرب المصفوفات ليس تبادليا، بالتالي من الضروري ضرب المصفوفات بترتيب معين. تحقق بنفسك كيف أن BAB^{-1} لا تساوي A.

تستخدم الآلة الحاسبة عدد يسمى المحدد (*determinant*) لمصفوفة (مربعة) من أجل إيجاد معكوسها. ويرتبط محدد المصفوفة بأبعاد عناصرها. ويمكن حسابه مباشرة من خيارات الصفحة الثانية من قائمة OPTN. وفي حالة A، إذا قمت بدراسة عناصر المعكوس والمصفوفة الأصلية، ستكون قادرا على رؤية وجود المحدد وهو 13. بالرغم من أنه من الصعوبة رؤية هذا للمصفوفات 3 × 3 ومصفوفات أعلى (انظر النشاط 5).

بنفس الطريقة نجد أن العدد 0 لا يملك معكوس ضربي، المصفوفة ذات المحدد صفر لا تملك معكوسا.

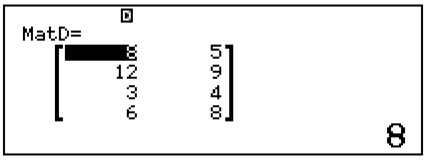
إن تدوير المصفوفة هو مصفوفة جديدة بصفوف وأعمدة معكوسة. حيث يجري في العادة تمثيل تدوير المصفوفة B على أنها 'B. ويمكن الحصول على هذا بشكل مباشر من الصفحة الثانية من قائمة OPTN وذلك كما هو مبين أدناه.



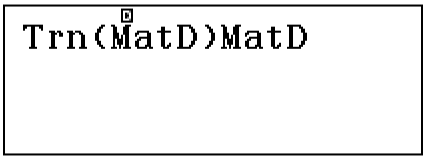


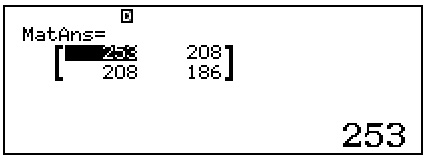
وتستخدم عملية التدوير في الإحصاء بسبب نتيجة مفيدة يجري فيها عملية ضرب مسبق لمقلوب مصفوفة مع المصفوفة نفسها وهو ما يعطي مصفوفة متناظرة بمجموع مربعات الأعمدة في القطر والمجاميع الأخرى في باقي المصفوفة، وتستخدم برامج الحاسوب هذه الخاصية لأجل عمليات تحليل البيانات بسرعة وكفاءة.

قم بالنظر إلى المصفوفة D ذات الأبعاد 2 x 4 (معرفة في الأعلى ومعروضة في الأسفل). لنفترض أن العمودين هما نتيجتا شخص ما والصفوف الأربعة هي لأربع أشخاص (لكل شخص نتيجتا امتحان مثلا). بالتالي يمثل كل عمود متغيرا واحد بينما يمثل كل صف نتائج شخص واحد في متغيرين.



يمكنك التحقق من الخاصية بنفسك عبر استخدام الآلة الحاسبة لحساب D'D كما هو موضح في الأسفل.





إن مجموع مربعات الأعمدة في D هي $6^2 + 3^2 + 12^2 + 8^2 = 253$ و$5^2 + 9^2 + 4^2 + 8^2 = 186$ وهما عناصر القطر في D'D. ويجري تعريف مجموع النواتج عبر الأعمدة (بين الأعمدة) في هذه الحالة البسيطة على أنها $6 \times 5 + 3 \times 9 + 12 \times 4 + 8 \times 8 = 208$. لاحظ أن هذا هو الحد خارج القطر لـ D'D، متماثل في كل جانب من المصفوفة.

في حالة المصفوفات الأكبر، يجري تطبيق نفس الفكرة. إذا كان كل عمود من المصفوفة يمثل متغيرا، فإن الحدود القطرية تستخدم من قبل أجهزة الكمبيوتر للعثور على الفروق لكل متغير أما الحدود الغير قطرية يجري استخدامها من أجل إيجاد معاملات الارتباط بين المتغيرات وذلك كما هو موضح في الوحدة 11 والتي تهتم بتحيل البيانات ثنائية المتغير.

مصفوفات التحويل

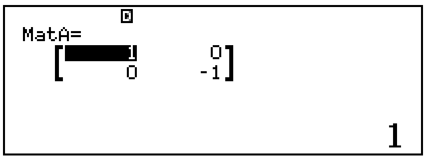
تعتبر المصفوفات مفيدة بشكل خاص بوصف تحويلات حادثة في مستوي أو في فراغ. على سبيل المثال، انظر في المصفوفة الخاصة 2×2 الموضحة أدناه المستخدمة في عملية الضرب المسبق وذلك من أجل إيجاد صور لثلاثة نقاط هي (5,1) ,(-4,3) و(3,-2) مع ملاحظة أن النقاط ممثلة في متجه عمودي 2×1.

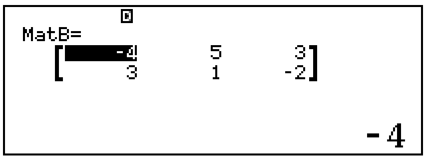
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

قم بدراسة هذه الحالات بعناية من أجل رؤية النمط: في كل حالة على حدة، قيمة x للصورة لا تتغير، في حين قيمة y معكوسة الإشارة. بالتالي يكون تأثير هذه المصفوفة الخاصة هو إنعكاس النقاط حول المحور x. أما مصفوفات 2×2 الأخرى فسوف تنتج نقاط تحول ولكن مع آثار هندسية مختلفة طبعا.

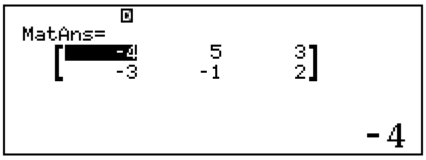
في هذه الحالة التوضيحية، فإن الأرقام سهلة كفاية للقيام بعملية ضرب المصفوفة ذهنيا، ولكن في الحالات الأخرى التي تتضمن مصفوفات تحويل أكثر تعقيدا، فمن الأفضل القيام بها باستخدام الآلة الحاسبة. تكمن إحدى الطرق للقيام بذلك عبر تعريف مصفوفة التحويل على أنها مصفوفة 2×2 وكل النقاط الثلاثة على أنها مصفوفة 1×2 منفصلة. ومع ذلك، تعتبر هذه العملية مملة قليلا وذات إشكالية على اعتبار أن الآلة الحاسبة ستملك ثلاثة مصفوفات معرفة في وقت واحد.

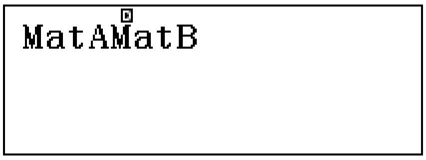
هناك طريقة أسهل وأكثر فعالية وهي تحديد مصفوفة التحويل 2×2 ثم تحديد مصفوفة 3×2 تمثل كل النقاط الثلاثة في وقت واحد، مع نقطة واحدة في كل عمود من أعمدة المصفوفة. تعرض الشاشات في الأسفل مصفوفة التحويل A و مثلث مكون من ثلاث نقاط هي B. (وسنستخدم الآن مصفوفات A و B مختلفة عن تلك السابقة).





ونتيجة التحويل سيجري رؤيتها بشكل جاهز عن طريق حساب AB:





تعرض الأعمدة في المصفوفة الناتجة النقاط بعد التحويل في الأعمدة، (3-,4-)، (5,1) و(3,2) حيث تعرض كيف أن المثلث إنعكس حول المحور x.

المصفوفات والمعادلات

من الاستخدامات المهمة للمصفوفات هي في تمثيل ومن ثم حل أنظمة المعادلات الخطية. إذا كنت قد درست الوحدة 4، سترى كيف أن الآلة الحاسبة تستخدم مصفوفة معاملات من أجل حل نظم معادلات خطية. ويمكن القيام بنفس المهمة بشكل دقيق باستخدام المصفوفات.

للتوضيح ذلك، قم بالنظر لنظام المعادلات الخطية التالي:

$$3x - y = 20$$

$$2x + 5y = 2$$

يمكن تمثيله على أنه معادلة مصفوفة AX = B حيث

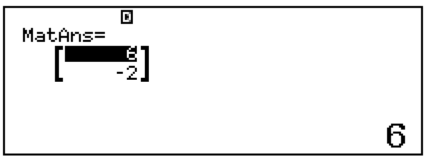
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

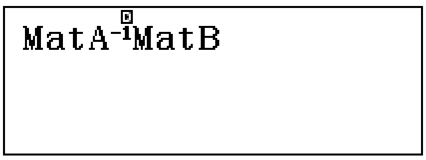
ومن ثم يمكن حل معادلة المصفوفة عن طريق الضرب المسبق لجانبي المعادلة بمعكوس مصفوفة معاملات، A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

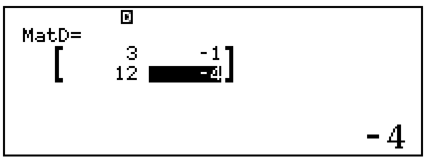
بالتالي $X = A^{-1}B$,

بعد إدخال المصفوفات A وB في الآلة الحاسبة، يتم الحصول على الحل بسهولة مع $A^{-1}B$ كما هو مبين أدناه:





يمكن قراءة الحل $x = 6$ و $y = -2$ مباشرة من المصفوفة 1 x 2 أعلاه. تحقق بالتعويض الذهني كيف أن هذا الحل يحقق كل من المعادلات الأصلية. لاحظ أن مصفوفات المعاملات التي لا يكون لها معكوس (أو مع محددات هي صفر) مرتبطة مع أنظمة المعادلات التي لا تملك حلا (فريد)، إليك مثال:



هل يمكنك أن ترى لماذا لا يوجد حل في هذه الحالة؟

وتشترك عمليات مماثلة لاستخدام المصفوفات في العثور على حل لنظم المعادلات الخطية المكون من ثلاثة مجاهيل، أو أربع معادلات خطية مع أربع مجاهيل وهلم جرا.

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة.

1. بالنظر للمصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

احسب أين يكون ممكنا على الآلة الحاسبة إيجاد ما يلي (وإن لم يكن ممكنا، فسر لماذا):

a) $5A$ b) $A + C$ c) AB d) CD e) BD f) A^2 g) A^{-1} h) C^6

2. a) استخدم الآلة الحاسبة من أجل إيجاد محدد $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) قم بتعديل المصفوفة A من أجل استبدال الكسر برقم 3، ومن ثم إيجاد محدد المصفوفة الجديدة.

3. استخدم آلتك الحاسبة وحقيقة أن $AX = B$ ثم $X = A^{-1}B$ من أجل حل هذه النظم من المعادلات:

a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 2 \\ x + 5y &= 29 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 1.2x - 4y &= 0.62 \\ 1.6x - 2.8y &= 1.46 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 4y - z &= -2 \\ 3x - y + 3z &= 19 \\ -2x + y + z &= -7 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - z + 4y &= 15 \\ z - y + x &= 0 \\ y + 4x - 2z &= 17 \end{aligned}$$

4. قم بالنظر لتأثير مصفوفة التحويل $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ على المثلث ABC مع A (1,1)، و B (4,1) وC (4,3) . قم بإجراء عملية ضرب المصفوفة المناسب من أجل إيجاد النقاط الجديدة A′B′C′، وهكذا، باستخدام الرسم أو أي طريقة أخرى، صف التحويل الجديد الممثل بالمصفوفة.

5. لاحظت رند أن سعر 4 عصائر و 3 أكواب من القهوة تكلفان 26$، بينما يكلف 2 من العصائر و 5 أكواب من القهوة 27$. ليكن سعر العصير s$ وسعر القهوة c$ ، قم بوضع زوجين من المعادلات واستخدم الآلة الحاسبة من أجل حلها لمعرفة تكاليف كل من المشروبات.

6. بالنظر للمصفوفة التالية A في الأسفل والتي يمثل فيها كل عمود نتائج مجموعة مكونة من ثلاثة طلاب في امتحانين مختلفين.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

استخدم أمر تدوير المصفوفة من أجل إيجاد A′A والتحقق من أن العناصر القطرية للمصفوفة الناتجة هي مجموع مربعات نتائج الامتحانات بينما العناصر الغير قطرية هي نواتج ضرب نتائج الامتحان.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. لديك المصفوفات الثلاثة التالية: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

a) بالنظر لأثر كل مصفوفة على المثلث ABC مع A(-1,1) و B(-1,5) وC(-4,5)، اكتب آثاره على المصفوفات P و Q و R.

b) بإستخدام ضرب المصفوفات بين أن 1) $P^2 = Q$ (2 $P^3 = R$ و3) $Q^2 = I$. فسر لم هذه العلاقات صحيحة.

c) المصفوفات $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ والتي تمثل انعكاسات.

1) صف التحويلات الممثلة بكل مصفوفة.

2) تحقق من ان التركيبات الممكنة لكل من F و G و H وكيف أن الجمع بين إنعكاسات معينة يكون مكافئة لعملية دوران.

2. قم بالتحقق من معكوس حاصل ضرب مصفوفتين، وذلك عبر اختيار مصفوفة 2 × 2 لـ A و B. تحقق بشكل خاصة من إمكانية رؤية فيما إذا كان $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ أو $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. تحقق من آثار التحويل للمصفوفتين $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. يجري تحضير سلال فواكه من أجل بيعها في مهرجان. تحوي السلة *الأساسية* تفاحتان، خوختان، وثلاث حبات مانجو. أما السلة *الفاخرة* فتحتوي على ست حبات تفاح، و3 حبات خوخ و 4 حبات مانجو. أما السلة *الفاخرة جدا* فتحوي 10 حبات تفاح و5 حبات خوخ و5 حبات مانجو. ومع امتلاكنا 420 حبة تفاح، و310 حبات خوخ، و 430 حبة مانجو؛ كم عدد السلال الممكن تنسيقها؟

5. نحتاج محدد مصفوفة من أجل إيجاد عكسها.

إذا كان، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالتالي $|A| = ad - cb$ و $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. تحقق من أن المصفوفة التالية $Q = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$ تملك محددا هو صفر.

فسر أهمية هذا في حل نظم المعادلات الخطية التالية:

$$5x + 8y = 6$$
$$10x + 16y = 3.$$

قم بالنظر لمصفوفات 3 x 3 من هذا المنظور أيضا.

6. تحقق مما يحدث عندما يجري الضرب المسبق لبيانات مصفوفة بمقلوبها. على سبيل المثال، ابدأ بمصفوفة مثل D الموجودة في الأسفل والتي فيها يمثل كل عمود امتحان معين وكل صف يمثل طالب معين:

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 11 \\ 16 & 18 & 17 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

قم بدراسة الحدود القطرية واللاقطرية من أجل $D'D$ بعناية. من ثم، جرب بيانات مصفوفة أخرى من أجل النظر في النماذج الخاصة بنتائجك.

ملاحظات من أجل المعلمين

يسلط هذا النموذج الضوء على الطرق التي يمكن فيها للآلة الحاسبة كاسيو *ClassWiz* مساعدة الطلاب في استخدام المصفوفات. حيث جرى استخدام المصفوفات على كامل الوحدة. يجب على الطلاب قراءة هذه الوحدة لمساعدتهم على رؤية كيفية استخدام هذه الآلة الحاسبة من أجل معاينة المصفوفات بطرق المختلفة. وبينما يجب على الطلاب القيام بالتمارين بأنفسهم، من الأفضل القيام بها مع زميل لكي يتمكنوا من مناقشة النتائج معا والتعلم من بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. a) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 1 & -19 & -20 \end{bmatrix}$ d) غير ممكنة لأن C هي2 x 2 و D هي 3 x 2

e) $\begin{bmatrix} 5 & 32 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -647 & 4320 \\ -1440 & 9433 \end{bmatrix}$

2. a) 4- استخدم 2 1 من أجل إدخال½ b) 1 (استخدم [SHIFT] [4] و [2] من أجل تعديل المصفوفة)

3. a) {4,5} b) {1.35,0.25} c) {4,-1,2} d) {3,1,-2}

4. دوران باتجاه عقارب الساعة بزاوية 90^o حول (0,0)

5. تكلفة العصائر 3.50$، والقهوة 4$.

6. $\begin{bmatrix} 78 & 92 \\ 92 & 109 \end{bmatrix}$. التحقق من الخصائص:

$5 \times 6 + 7 \times 8 + 2 \times 3 = 92$ و $5^2 + 7^2 + 2^2 = 78, 6^2 + 8^2 + 3^2 = 109$.

النشاطات

1. الهدف هنا هو إستكشاف الطلاب مصفوفات التحويل المختلفة. شجع الطلاب على عرض نتائجهم على الورق وفكر بمثلثات إضافية وليس فقط ذاك المعطى. [الإجابات: P، R يمثلان دوران بزاوية 90^o حول نقطة الأصل وذلك باتجاه عقارب الساعة وبعكس اتجاه عقارب الساعة على الترتيب، بينما تمثل Q دوران بمقدار 180^o حول نقطة الأصل. إن كل من F، G و Hهي انعكاسات حول المحور x و المحور y و المحور $y = x$ على الترتيب. G متبوعة بـ F = Q، إلخ].

2. شجع الطلاب على تجربة أمثلة متعددة قبل الانتقال إلى الخلاصة. قد يتفاجؤون بالنتيجة كيف أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ بدلا من $A^{-1}B^{-1}$، من الأمور التذكيرية الأخرى هي حول أهمية ترتيب عملية ضرب المصفوفة حيث قد تود اتباع الملاحظات العامة التالية:

$$(B^{-1}A^{-1}) \times AB = B^{-1}(A^{-1} \times A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

3. شجع الطلاب على تجربة مصفوفات تحويل متعددة وذلك من أجل رؤية آثارها. قم برسم النتائج على مخطط رسومي أو ورقة وهو الأمر الذي سيساعد أكثر على فهم الآثار هذه. اقترح أن يقوموا بتجربة مصفوفة بعامل مد سلبي في حال لم يخطر هذا في الأساس ببالهم. [الأجوبة: ينتج النوع الأول من المصفوفات مد عمودي في حين تنتج الأخرى مد أفقي].

4. يتضمن هذا النشاط قيام الطلاب باستخلاص المعلومات من الوصف وتمثيله بمنظومة خطية مع ثلاثة متغيرات. والمتغيرات هي عدد السلال لا ما تتألف منه السلة [الإجابات: 100 سلة أساسية، 20 سلة فاخرة، 10 سلال فاخرة للغاية]

5. لم يعط تعريف المحدد في هذا النص حيث جرى الافتراض بأن تعريفه جاء في محاضرة عادية. يستكشف هذا النشاط الوضع في حالة وجود محدد هو الصفر، وبسبب الاعتمادية الخطية، بالتالي لا تملك المعادلة أي حل. شجع الطلاب على تكوين ودراسة المزيد من الأمثلة مثل هذه. لو تمكنوا من إكمال الوحدة 3، قد يكون من المفيد لهم إدخال المعادلات ضمن نمط الدالة/المعادلة إضافة لذلك.

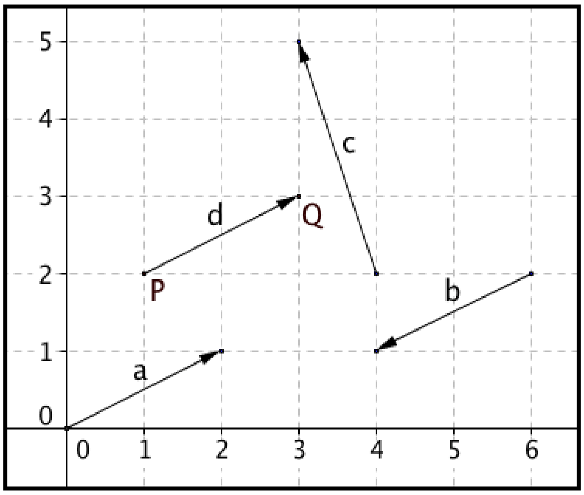
6. إن الضرب مثل D′D مهم لإنها جزء من الآلية المستخدمة من قبل الحواسيب لحساب وبشكل فعال المصفوفات ذات التباين من أجل مجموعة من المتغيرات. وهذا النشاط المبني على التمرين 6، ستؤدي عملية الدراسة المتأنية له إلى عرض لماذا تنتج العناصر القطرية مجموع مربعات مختلف عن تلك غير القطرية (سيقود هذا إلى مصفوفة متناظرة). شجع الطلاب على استكشاف أمثلة أخرى.

الوحدة الثامنة
المتجهات

تستخدم المتجهات (Vectors) في الرياضيات والعلوم والهندسة حيث تلعب دورا هاما في التطبيقات الرياضية. توفر الآلة الحاسبة كاسيو *ClassWiz* دعما كبيرا لفهم واستخدام المتجهات. ابدأ هذه الوحدة بالانتقال لنمط المتجهات عن طرق النقر على 5 MENU.

تمثيل المتجهات

تكمن الفكرة الرئيسية من المتجه في أنه كمية تحتوي على طول واتجاه حيث تعتبر سرعة الرياح و القوى أمثلة جيدة على هذا. ومن الطرق الشائعة لتمثيل المتجهات بيانيا تكمن عبر استخدام خط موجه (أي مع سهم يحدد الاتجاه) على اعتبار بأنه قادر على إظهار كل من الطول والاتجاه في آن واحد. ويظهر على شاشة الكمبيوتر في الأسفل أربعة متجهات ثنائية الأبعاد في المستوى الديكارتي.



هناك العديد من الطرق المستخدمة في الرياضيات من أجل تمثيل المتجهات حيث تعرض شاشة الكمبيوتر كيف يمكن تمثيل المتجهات باستخدام حروف لنقطتي البداية والنهاية أو ببساطة كتابته برمز جبري. وهكذا، يمكن تمثيل المتجه الذي يصل النقطتين P و Q في الشاشة السابقة بالطرق التالية (وكذلك البقية):

$$\overrightarrow{PQ},\ \vec{d}\,,\ \underset{\sim}{d}\,,\ \mathbf{d}$$

سنقوم في هذه الوحدة، باستخدام حرف إنكليزي في حالته العادية (مثل a) لتمثيل المتجه بنفس الطريقة التي استخدمنا فيها حرف إنكليزي كبير لتمثيل المصفوفة (والذي كان A) في الوحدة السابعة.

لاحظ في شاشة الكمبيوتر كيف يمتلك كلا المتجهين (a و d) نفس الاتجاه و الطول. بالتالي، إذا كانا يمثلان سرعة الرياح، سيجري تمثيلهما بنفس السرعة وبنفس الاتجاه. ويعني هذا أن d = a. وحقيقة أن المتجهات المعروضة تبدأ من نقاط مختلفة لا يعني بأنها متجهات مختلفة: فقط الطول والاتجاه هما المهمين. لاحظ أن b مختلفة عن a و d حيث يذهب هذا المتجه في اتجاه مختلف. كما يملك المتجه c طولاً مختلفا عن المتجهات الثلاثة الأخرى إضافة إلى اتجاه مختلف.

عندما يتم عرض المتجهات على شاشة بإحداثيات كما هو مبين في الأعلى، يغدو من السهل وصفها باستخدام زوجين مرتبين من الأرقام. في كل حالة، يعرض المتجهان المتساويان حالة متجه يذهب 2 وحدة إلى اليمن و 1 وحدة إلى الأعلى. هذه الطريقة سهلة عندما ينطلق المتجه من نقطة الأصل، كما هو حال المتجه a. بالتالي يمكن وصف المتجه a بعدة طرق (باستخدام الإحداثيات) وذلك على غرار:

$\mathbf{a} = (2,1)$ $\mathbf{a} = [2,1]$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

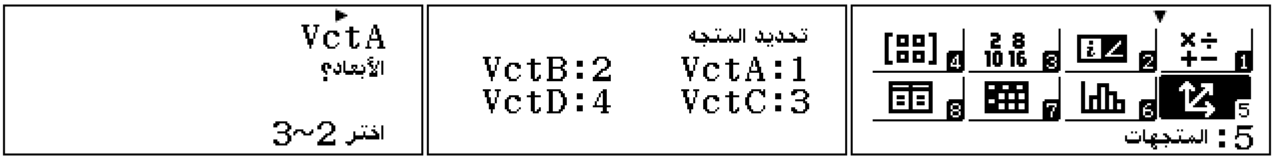
سوف نقوم في هذه الوحدة باستخدام الاحتمال الأول فقط وذلك من أجل تفادي الخلط ولكي نتفق مع كيفية تمثيلها على الآلة الحاسبة وذلك كما هو موضح في الأسفل.

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

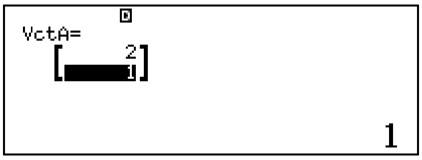
لاحظ كيف أنه لم يجر تسمية d وفقا للإحداثيات الخاصة بنقطتي نهايتيه $P(1,2)$ و$Q(3,3)$ ، ولكن وفقا للمسافات الأفقية والرأسية 2 و 1 على التوالي بين نقطتي النهاية. لاحظ أنه يجري عرض المكون الأفقي أولا (بالتالي إذا كان سالبا فسيكون الاتجاه من اليمن إلى اليسار وذلك كما هو حال المتجهين b و c).

ومن المفيد التفكير بالمتجه بشكل مشابه لمصفوفة خطية (ويدعى أحيانا "متجه صفي" (row vector) (بالتالي يمكن التفكير بالمتجهين الموجودين في الأعلى على أنهما مصفوفة 1 x 2).

أما على الآلة الحاسبة، فيجري تمثيل المتجهات باستخدام مكوناتها العددية، من أجل تعريف متجه، ابدأ باختيار نمط المتجهات عبر النقر على 5 MENU ومن ثم انقر 1 للمتجه a ثم 2 من أجل تحديد أنه متجه ذي بعدين.

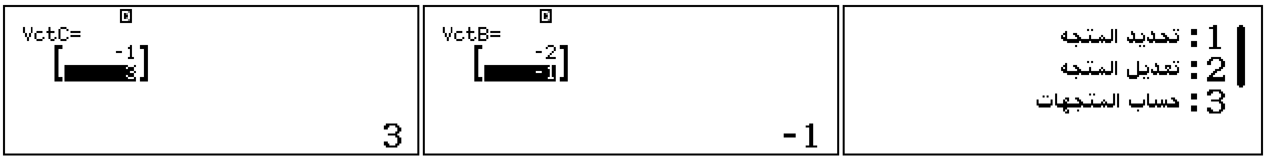


ادخل العناصر (في هذه الحالة 2 و 1) مع النقر على = بعد كل مدخل وتعرض الشاشة التالية: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



ستسمح لك الآلة الحاسبة بتخزين ما يصل إلى أربعة متجهات. بعد تخزين المتجه الأول، اضغط OPTN ثم 1 لتعريف المتجهات الأخرى.

تعرض الشاشة أدناه $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باستخدام هذه العملية.

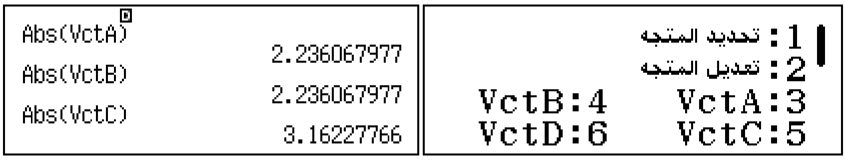


طول واتجاه المتجه

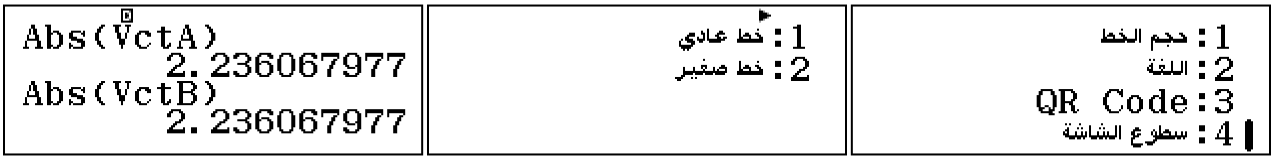
إن الصفتين المميزتين للمتجه هما طوله واتجاهه. على سبيل المثال، في حالة سرعة الرياح، ستكون سرعة الرياح هي طوله والاتجاه الذي تهب منه هو الاتجاه. ويمكن تعريف كل من هذين الأمرين على الآلة الحاسبة من المكونات الأفقية والعمودية حيث يجري تمثيل سرعة الرياح بواسطة طول المتجه. يمكنك تحديد ذلك باستخدام نظرية فيثاغورس. على سبيل المثال، فإن طول a، الممثل بـ |a| هو

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

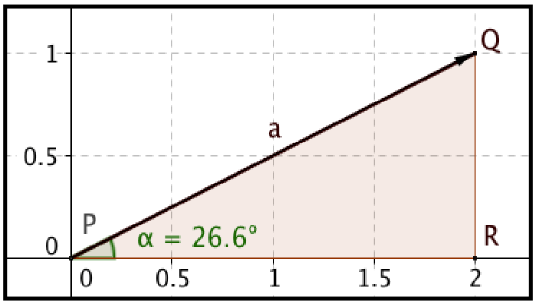
على الآلة الحاسبة، سيقوم مفتاح القيمة المطلقة Abs (مع SHIFT ( ) بحساب حجم المتجه مباشرة. قم بإزالة كل ما هو على شاشة الحاسبة، باستخدام AC ، ثم اختر Abs واختر المتجهات من قائمة OPTN حيث تعرض الشاشة في الأسفل هذه العملية مكررة من أجل كل من المتجهات الثلاث. تظهر الشاشة كيف أن b تملك نفس طول a بالرغم من اختلاف الاتجاه، بينما يكون طول c أكبر (كما هو متوقع من الرسم البياني على الصفحة الأولى).



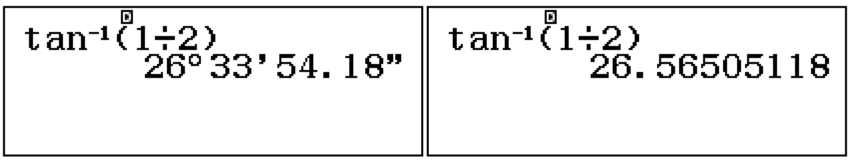
تسمح لك الآلة الحاسبة بعرض أكثر من سطر واحد من المعلومات. في هذه الحالة، ستكون جميع النتائج الثلاث المبينة أعلاه على شاشة واحد وذلك عن طريق انتقاء خط أصغر من المعتاد وعبر استخدام أمر حجم الخط في شاشة الإعدادات SET UP. إذا ما تم اختيار خط عادي، سيجري عرض فقط اثنين من النتائج الثلاثة في شاشة واحدة وذلك كما هو مبين أدناه. إن عملية اختيارك للخط يعتبر تفضيلا شخصيا (سنقوم في هذا النموذج بعرض النتائج بخط "عادي" وفي بعض الأحيان بخط "صغير").



يمكن قياس اتجاه متجه عبر زاوية. في هذه الحالة، سوف نستخدم الزاوية التي يصنعها المتجه مع الأفق والمقاسة بعكس اتجاه عقارب الساعة من اتجاه المحور x الموجب. ومن أجل إيجاد هذه الزاوية، قم برسم مثلث إفتراضي ومن ثم أوجد الزاوية والتي تشكل إحدى زوايا المثلث القائم عبر علم المثلثات.



في المثلث PQR، فإن $\tan\alpha = \dfrac{QR}{PR}$ ، بالتالي $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{QR}{PR}$. ويمكن حساب ذلك باستخدام مكونات **a**:



تعرض الشاشة الثانية كيف أنه يمكن استخدام مفتاح x من أجل الانتقال من الدرجات العشرية إلى الدرجات والدقائق والثواني (ولكن في الوقت نفسه، نادرا ما نحتاج إلى مثل هذه الدقة المفرطة في القياس).

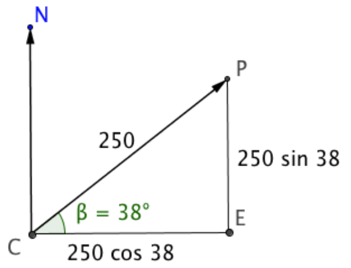
من أجل تحديد اتجاه b، أضف 180° إلى ذلك لـ a على اعتبار أنها نصف دورة كاملة إضافية في اتجاه عكس اتجاه عقارب الساعة. يمكن الحصول على الاتجاه من أجل c بطريقة مشابهة ولكنك تحتاج هنا إلى إضافة 180° إليها أيضا حيث تعطي الآلة الحاسبة زاوية سالبة لـ $\tan^{-1}$ عندما يكون الظل (tangent) سالب.

```
tan⁻¹(1÷2)+180
        206°33'54.18"
tan⁻¹(3÷-1)+180
          108°26'5.82"
```

يوضح هذان المثالان كيف أنك بحاجة دائما إلى رسم المتجه باليد تقريبيا (على غرار ما قمنا به في بداية الوحدة هذه) وذلك للتأكد من أن الزوايا التي تم الحصول عليها مناسبة.

في بعض الحالات، قد تعرف الطول والاتجاه الخاصين بمتجه، ولكن لا يمكنك معرفة مكوناته العمودية والأفقية. على سبيل المثال، تحلق طائرة بإتجاه الشمال الشرقي 52^{o} بسرعة 250 كيلومترا في الساعة.

كما يبين الرسم البياني، يمكن الحصول على مكونات المتجه $\overrightarrow{CP}$ التي تمثل مسار الطيران الخاص بها باستخدام علم المثلثات حيث نرى في الرسم كيف أن PE هو الخط العمودي و CE هو الخط الأفقي.



والمكونات في المثلث الموجود في الأسفل PEC هي:

$PE = 250 \sin 38^{o}$ و $CE = 250 \cos 38^{o}$

يمكن إدخال المتجه في الآلة الحاسبة على أنه **a** باستخدام هذه التعابير وذلك كما هو موضح أدناه.

```
Abs(VctA)
              250
```

```
VctA=
  [  197 ]
  [153.91]

250sin(38)
```

```
VctA=
  [  197 ]
  [153.91]

250cos(38)
```

سوف تقوم الحاسبة بتقييم كل تعبير حيث سنرى كيف أن طول المتجه هي 250 كما كان متوقعا.

إجراء العمليات الحسابية على المتجه

تأتي قوة المتجهات من عملية معالجتها، وليس من عملية تمثيلها فقط.

إن الضرب القياسي لمتجه هو ضرب المتجه بعدد. بالتالي فإن المتجه 5a هو ضرب المتجه a بـ5. وكما في الشاشة الموضحة أدناه، يمكننا رؤية أثر القيام بهذا بسهولة على الآلة الحاسبة من ضرب كل المكونات بالرقم 5. انقر على AC لبدء عملية حسابية جديدة. اختر المتجهات التي ترغب بأداء عمليات لها من قائمة OPTN.

ستكون نتيجة 5a هي متجه في نفس اتجاه a مع طول أكبر بخمس مرات كما هو مبين (تعرض الشاشة الأولى الأمر، وتعرض الثانية النتيجة).

```
VctAns=
  [10]
  [ 5]

               10
```

```
5VctA
```

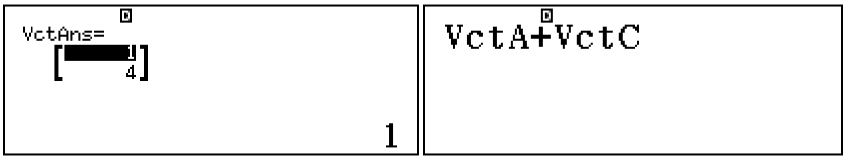
لاحظ في الأسفل كيف أن ضرب متجه بعدد سالب سيؤدي إلى عكس اتجاه المتجه (وبالتالي يعطينا هذا متجه مضاد) حيث تعرض الشاشات في الأدنى كيف أن b = -a = (-1)a.

```
VctAns=
  [-2]
  [-1]

               -2
```

```
-VctA
```

يمكن إضافة المتجهات لبعضها البعض شرط أن يكون لديها نفس عدد المكونات. بالتالي يمكننا إيجاد نتيجة **a** + **c** مباشرة على الآلة الحاسبة:

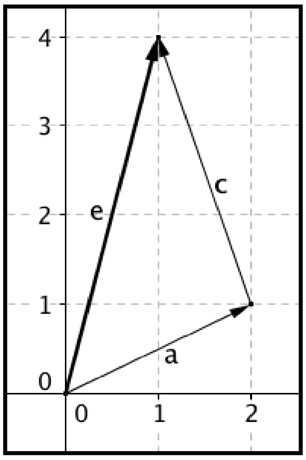


إذا كنت تنظر في مكونات متجهين اثنين، يمكنك رؤية كيف جرى إضافة المكونات المتطابقة لبعضها البعض من أجل الحصول على النتيجة. تأكد من أن 1 = 1- + 2 و4 = 3 + 1

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

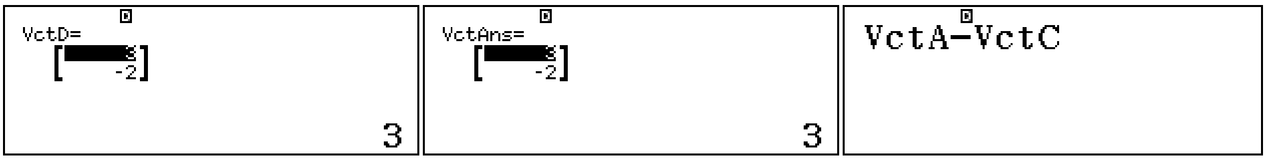
وكما نرى في الرسم البياني الموجود في الأسفل، سيعطينا إضافة متجهين لبعضهما البعض متجه ثالث (غامق كما نرى في الأسفل) والذي يشكل الضلع الثالث من مثلث.

ابدأ مع $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ، ثم قم إضافة $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ من أجل الحصول على $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$.



يمكن النظر إليه على أنه البدء من نقطة الأصل ثم الذهاب عن طريق a ومن ثم المتابعة عبر c لكي نصل إلى النتيجة النهائية (1,4)، وهذا الأمر يكافئ الذهاب مباشرة من نقطة الأصل إلى (1,4) مع المتجه e.

تتعلق عملية طرح المتجهات من بعضها البعض بعملية جمعها، بمعنى آخر، لكي تقوم بطرح متجه من آخر، عليك بإضافته إلى معاكسه. بالتالي a – c = a + -c. أما على الآلة الحاسبة، فيمكن إجراء الطرح بشكل مباشر:



ويمكن تخزين نتيجة العملية الحسابية (والتي تدعى VctAns) في متجه عبر استخدام مفتاح STO متبوعا بحرف التخزين الذي تريده (A، B، C أو D).

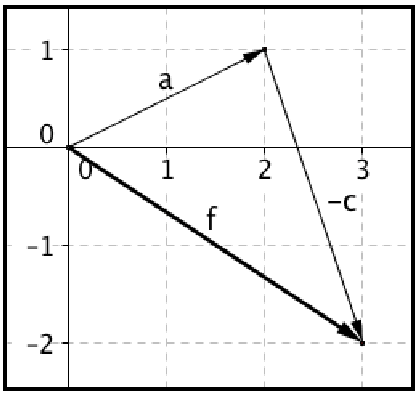
في الشاشة اليسرى في الأعلى جرى نقر STO sin بشكل مباشر بعد أن جرى الحصول على نتيجة الطرح من أجل تخزين النتيجة في المتجه D. (لا حاجة لاستخدام زري ALPHA أو = لاستكمال عملية التخزين). لاحظ كيف أن شاشة الآلة الحاسبة تعرض الآن رمز VctD للإشارة إلى التخزين.

من جديد، من المفيد النظر في هذا في الرسم البياني.

في هذه الحالة، ابدأ مع $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ثم قم بإضافة $\mathbf{-c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (وهو المتجه المعاكس لـ $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ من أجل الحصول على نتيجة $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ والمعروض بخط عريض في الرسم.

وكما يمكنك أن ترى من الرسم البياني، يكون المتجه الناتج (وهو $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$) نفسه الذي نتج على الآلة الحاسبة).

لاحظ أن $\mathbf{f} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ وهو متوقع عندما $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{f}$

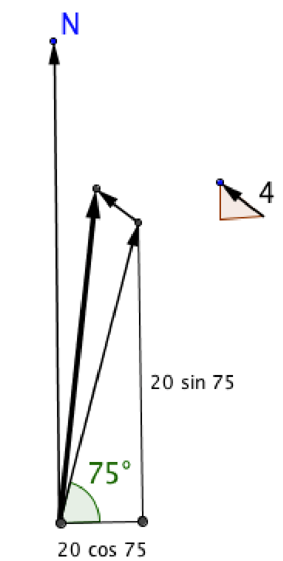


مثال من الإبحار

تعتبر إضافة المتجهات لبعضها مفيدا بشكل خاص عندما تتفاعل قوتين من نوع واحد في نفس اللحظة. ومن الأمثلة على هذا قارب يبحر بسرعة معينة وفي اتجاه معين عندما يكون هناك تيار يؤثر عليه في نفس الوقت. انظر للمثال التالي:

يبحر زورق صيد في اتجاه الشمال الشرقي 15^o بسرعة 20 كم في الساعة. هناك تيار بسرعة 4 كم في الساعة في اتجاه شمال غرب. صف حركة القارب.

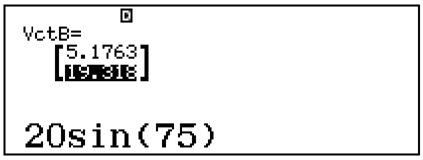
تمثل حركة القارب وحركة التيار متجهين **b** و **c** على الترتيب. بالتالي مسار القارب (مع أخذ كلا القوتين بعين الاعتبار) سيعطى بالعلاقة **b + c**. 4ثتس

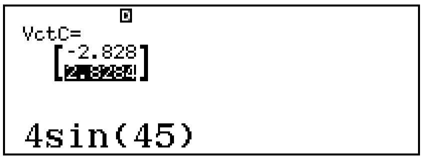


في كل حالة، لا بد من حساب مكونات المتجه. انظر للرسم المقابل من أجل رؤية كيف أن

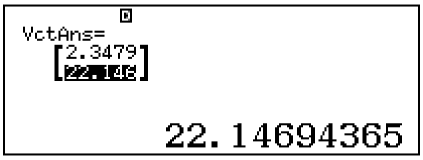
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20\cos 75^o \\ 20\sin 75^o \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4\cos 45^o \\ 4\sin 45^o \end{bmatrix}$$

لاحظ الإشارة السالبة من أجل المكون الأفقي للتيار.





أدخل هذه المعلومات إلى الآلة الحاسبة وانظر للمجموع:

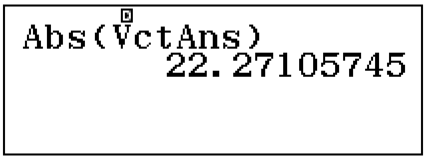


إذا كنت ترغب في دراسته في وقت لاحق، يمكنك تخزين نتيجة VectAns كمتجه باستخدام STO ثم مفتاح الحرف المناسب (إما A أو B أو C أو D).

من أجل الحصول على اتجاه الناتج، ستحتاج لكتابة المكونات والتي هي (مقربة إلى 3 منازل عشرية):

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2.348 \\ 22.147 \end{bmatrix}$$

أما عن سرعة القارب في المياه، فتعطى من خلال طول كل من $\mathbf{b} + \mathbf{c}$:



إن اتجاه القارب مقاس من الأفق يبلغ ≈ 83.95°.

وبالتالي فإن القارب يبحر في اتجاه شمال شرق 6° بسرعة 22.3 كيلومترا في الساعة.

ويؤدي تأثير التيار على القارب لجعله يبحر أسرع قليلا مما كان عليه لو كانت المياه راكدة، وسوف تدفعه إلى الشمال قليلا كما يمكنك أن تفكر بعد رؤيتك للوضع الموجود على الرسم البياني (والذي لم يجر رسمه وفق المقياس).

الضرب القياسي (Dot product)

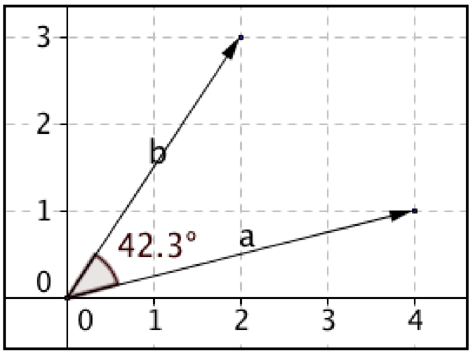
من عمليات المتجه المفيدة عملية Dot product لمتجهين، والتي تدعى الضرب القياسي. وهي كمية عددية (بمعنى آخر، هي عدد) معرف بالشكل:

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين.

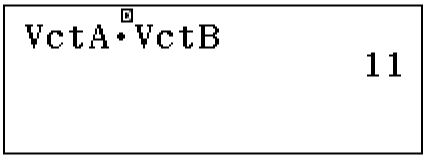
في بعض الأحيان يجري وصف الضرب القياسي بأنه "الضرب الداخلي" والذي يمكن حسابه عبر ضرب عناصر مكونات المتجه كل بحسب المقابل له ومن ثم إضافة الناتج. وهناك عملية آلة حاسبة متوفرة لقياس ذلك بشكل تلقائي.

قم بالنظر لمتجهين $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ كما هو مبين في الرسم البياني.



بالتالي سيكون الضرب القياسي متوفرا على الشاشة الثانية من قائمة OPTN من خلال النقر على **2** (الضرب القياسي). في هذه الحالة

$\mathbf{a.b} = 4 \times 2 + 1 \times 3 = 11$.



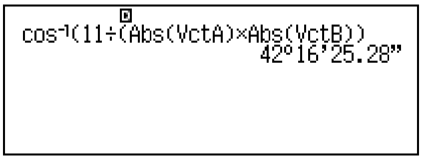
يعتبر الضرب القياسي مفيدا بشكل خاص كونه يسمح بإيجاد الزاوية بين متجهين، على اعتبار أن إعادة كتابة المعادلة الموجودة في الأعلى يعطينا:

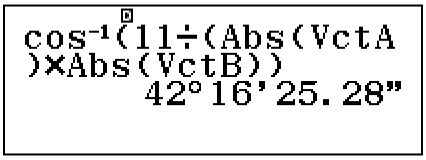
$$cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$$

بالتالي

$$\theta = cos^{-1}\frac{a.b}{|a||b|}$$

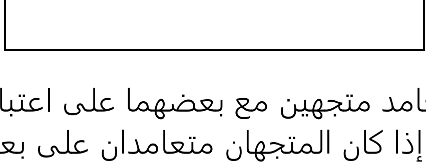
في حالة كل من a و b أعلاه، يمكن تحديد الزاوية حالما يجري العثور على الضرب القياسي. لاحظ في الشاشات في الأسفل الفرق بطريقة العرض في حال جرى عرضها بالخط العادي وبالخط الصغير. (قياس الزاوية هو نفسه بالطبع في الحالتين).

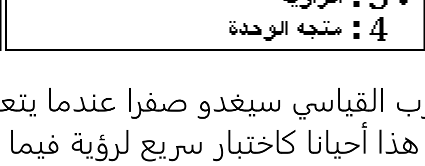




تبدو الزاوية معقولة بالنظر إلى الرسم أعلاه، ومتوافقة مع عملية الحساب التلقائية أعلاه.

في الواقع، يوجد أمر في الآلة الحاسبة **3**: الزاوية في الشاشة الثانية من قائمة OPTN والذي يحسب الزاوية بين متجهين من دون إيجاد الضرب القياسي وذلك كما هو مبين في الأسفل.





لاحظ كيف أن الضرب القياسي سيغدو صفرا عندما يتعامد متجهين مع بعضهما على اعتبار أن $\cos 90^o = 0$. ويستخدم هذا أحيانا كاختبار سريع لرؤية فيما إذا كان المتجهان متعامدان على بعضهما أم لا.

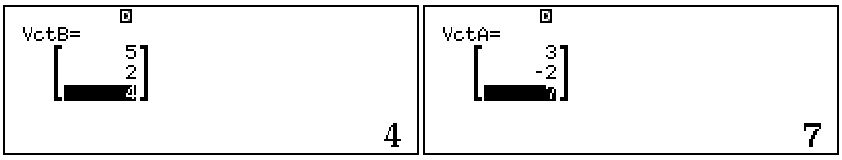
المتجهات ثلاثية الأبعاد

يمكن استخدام هذه المتجهات من أجل تمثيل الكميات في الفضاء ثلاثي الأبعاد. بينما تتطلب المتجهات في المستوي مكونان، تتطلب المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد ثلاثة مكونات فريدة. وتعتبر المتجهات في الفضاء أصعب رسما على هذه الصفحة من المتجهات في المستوى.

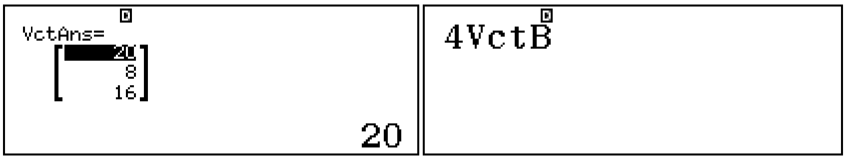
يجري حساب كل من الضرب القياسي وإضافة المتجه وطول المتجه علاوة على الضرب القياسي لمتجهين بنفس طريقة المتجهين ثنائيا الأبعاد. على سبيل المثال، انظر للمتجهين ثلاثيي الأبعاد التاليين:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

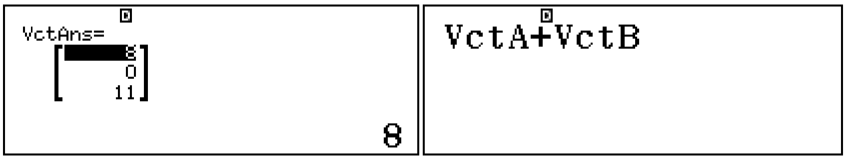
ادخل هذه في الآلة الحاسبة على أنها متجهات ثلاثية الأبعاد:



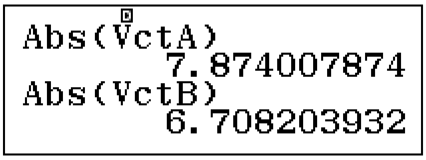
يتضمن الضرب بـ عدد ضرب كل مكون بنفس المقدار من أجل الحصول على متجه بنفس الاتجاه (إذا كان العدد موجب) لكن يختلف عنه في الطول. وفي الأسفل عرفنا **4b**:



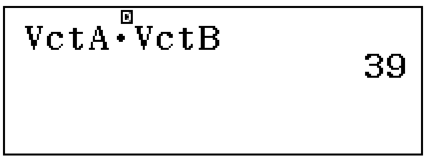
ونعرض هنا عملية جمع متجهين b + a = a + b مع إضافة المكونات:



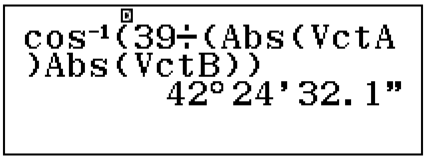
تتضمن الأطوال هنا ثلاثة حدود. على سبيل المثال $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}$

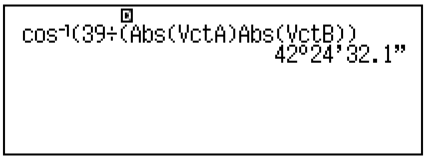


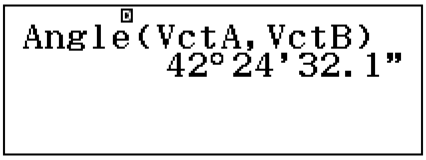
إن الضرب القياسي 39 = 4 x 7 + 2 x 2- + 5 x 3 = **a.b** كما هو مبين أدناه:



تتوفر الزاوية بين متجهين بنفس الطريقة التي تتوفر فيها من أجل المتجهات ثنائية الأبعاد أو عن طريق أمر الزاوية.





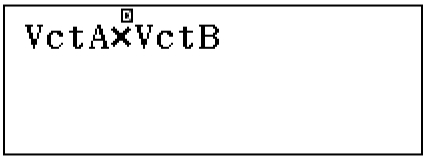


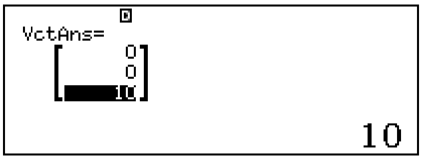
لاحظ من جديد في الشاشتين الأوليتين نتائج استخدام الخط العادي أو الخط الصغير.

الضرب المتّجهي (Cross product)

هناك شكل آخر لناتج متجهين يدعى ضرب اتجاهي (وأحيانا يشار إليه باسم الضرب المتّجهي). على عكس الضرب القياسي، يؤدي الضرب الاتجاهي لمتجهين إلى الحصول على متجه ثالث ويكون عامودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين.

دعونا ننظر أولا لمثال حول متجهين ثنائيي الأبعاد وهما $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$، كما تم إستخدامهما في الضرب القياسي سابقا في هذه الوحدة. يجري الحصول على ضرب متّجهي a x b على الآلة الحاسبة باستخدام مفتاح الضرب القياسي الموجود على الآلة الحاسبة وذلك كما هو مبين أدناه:

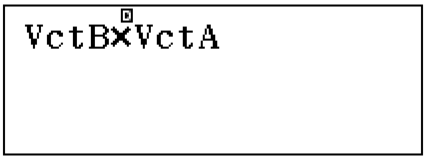


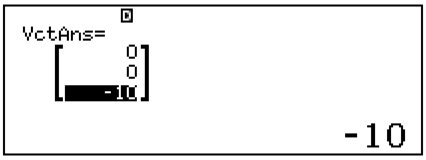


لاحظ أن النتيجة هي متجه ثلاثي الأبعاد $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

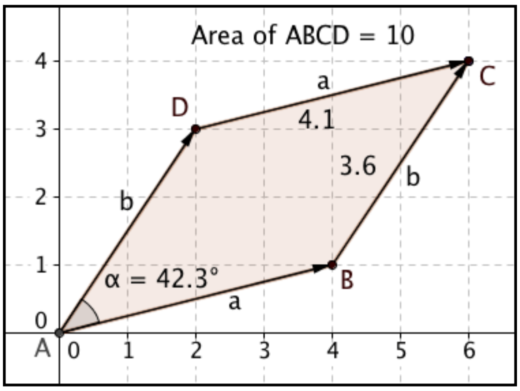
لاحظ أيضا أن المكونين الأولين هما صفر، وهو الأمر الذي يخبرنا بأن المتجه متعامد على المستوى الذي يقع فيه كل من a و b. في هذه الحالة، نحتاج هنا إلى متجه ثلاثي الأبعاد من أجل الحصول على متجه متعامد مع المستوى.

وعلى عكس الضرب القياسي، فإن الضرب المتّجهي ليس إبدالي حيث تعرض الشاشات المبينة أدناه كيف أن النتيجة التي جرى الحصول عليها ستكون مختلفة مما لو قمنا بتبديل ترتيب المتجهين:





ويكون طول الضرب المتّجهي هو نفسه المكون الثالث (في هذه الحالة، 10) حيث يعرض الرسم الموجود في الأسفل بعض القياسات المرتبطة بمتجهين:



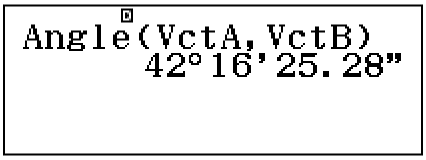
ويجري تكرار a و b في هذا المخطط من أجل رسم شكل متوازي الأضلاع ABCD. مساحة المثلث ABD تعطى بعلم المثلثات بالقانون:

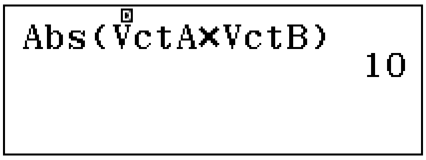
$$\text{مساحة}\,ABD = \frac{1}{2}|a||b|\sin\alpha$$

حيث أن الزاوية بين المتجهين ممثلة بالرمز **α**. بالتالي، فإن مساحة كامل متوازي الأضلاع بأكمله هو ضعف هذه المساحة أو

$$\text{مساحة متوازي الأضلاع}\ ABCD = |a||b|\sin\alpha$$

كما هو مبين على رسم الكمبيوتر أعلاه، ستكون هذه المنطقة مساوية للمكون الثالث من المتجه a x b. وعلى اعتبار أن المكونين الأولين هما صفر، فإن طول a x b هو كما نرى:

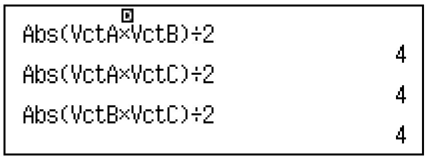


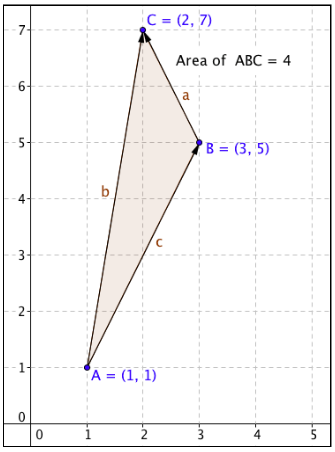


تقود هذه العلاقات إلى طريقة سهلة من أجل إيجاد مساحة مثلث في مستوى، معطاة إحداثيات رؤوسه عبر تمثيل جوانبه بمتجهات. بالتالي، إذا كان المثلث ABC يملك A(1,1)و B(3,5) وC(2,7) ، بالتالي عبر النظر إلى الإحداثيات، يمكن تمثيل الإحداثيات على أنها متجهات:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مساحة هذا المثلث إذن هي نصف طول الضرب الاتجاهي الناتج من أجل أي اثنين من المتجهات الثلاثة هذه. وذلك كما هو مبين أدناه. (يتم الحصول على نتيجة تساوي 4، بغض النظر عن أي زوج يجري استخدامه).

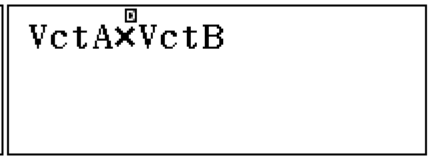


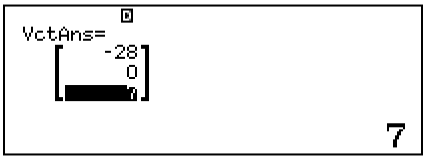


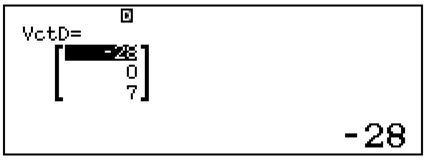
إن الضرب المتّجهي سيكون أيضا ثلاثي الأبعاد وذلك من أجل كل المتجهات الأصلية. على سبيل المثال، انظر للمتجهين التاليين:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

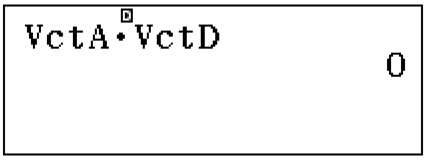
إن ناتج المتجه a x b هو متجه ثلاثي الأبعاد. وبعد الحصول على النتائج، سنقوم بتخزينه على أنه d باستخدام STO sin كما هو مبين في الشاشة الثالثة أدناه.

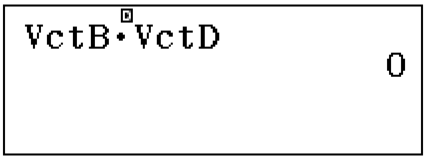




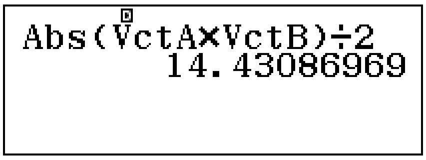


ولرؤية كيف أن الضرب المتّجهي متعامد على كل متجه من المتجهات الأصلية، تحقق من أن الضرب القياسي يساوي الصفر من أجل كل واحد. تقدم الشاشات في الأسفل صحة هذا من أجل كل من a و b.





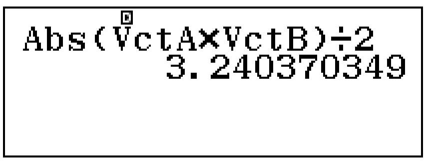
إن المتجهين a و b في المستوى، والذي يجري تعريفه عن طريقهما، والمتجه d = a x b وهو *عامودي* (أو متعامد) على ذلك المستوى. كما في حالة ثنائية الأبعاد، يمكن استخدام الضرب المتّجهي من أجل إيجاد مساحة المثلث مع أضلاع ممثلة بكل من a و b.



أيضا من أجل الحالة ثنائية الأبعاد، في حال كانت رؤوس المثلث معروفة، بالتالي يمكن استخدام الضرب المتّجهي لإيجاد المساحة الخاصة بذلك المثلث. على سبيل المثال، إذا كانت رؤوس المثلث هي(2,5,4)A ، و B(1,6,5)، وC(1,1,1) . بالتالي يمكننا الحصول على متجهات الضلعين عبر الإحداثيات:

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

ومن ثم تعطى مساحة المثلث عن طريق حساب التالي:



تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. ادخل المعطيات التالية $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$، $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ في الآلة الحاسبة ومن ثم استخدمها لإيجاد كل من

a) i) $3\mathbf{b}$ ii) $-2\mathbf{c}$ iii) $10\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

b) i) $|\mathbf{a}|$ ii) $|\mathbf{b}|$ iii) $|\mathbf{a} - \mathbf{c}|$ iv) $|\frac{1}{2}\mathbf{a}|$ v) $|-3\mathbf{c}|$

c) i) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ii) $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ iii) $4\mathbf{c} - \mathbf{b}$

2. أوجد الزاوية الحادة بين $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ والأفق(محور x).

3. أوجد المكونات الأفقية والعمودية لمتجه ثنائي البعد طوله 8 وحدات وانحدار بمقدار 20^0 على الأفق.

4. a) أوجد $|\mathbf{a}|$ من أجل $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$. b) قم بتعديل المتجه وتغييره إلى $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$. أوجد $|\mathbf{a}|$.

c) قم بتغيير المتجه إلى متجه ثلاثي الأبعد $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$. أوجد $|\mathbf{a}|$.

d) قم بتعديل المتجه بحيث يصبح $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$. أوجد$|\mathbf{a}|$.

e) فسر أي اختلافات في القيم الأربعة السابقة من أجل $|\mathbf{a}|$ التي جرى إيجادها في الأعلى.

5. لتكن $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$. ادخل هذه المتجهات في حاسبتك وأوجد:

a) $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ b) $|\mathbf{u}|$ c) $|\mathbf{v}|$ d) الزاوية θ بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

6. يمكن لـ "ورد" أن يسبح بسرعة 3 كم/ساعة في مياه هادئة. قام بالسباحة في نهر فيه التيار يتحرك بسرعة 1 كم/ساعة في الاتجاه الشرقي. أوجد سرعة "ورد" الناتجة فيما لو سبح a) مع التيار b) ضد التيار c) في الاتجاه الشمالي.

7. لتكن $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. أوجد a) $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ b) مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ ومتجهين متوازيين لهما. c) مساحة المثلث المتشكل من $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$.

8. لتكن $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ متجهين ثلاثيي الأبعاد.

أوجد a) $5\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ b) $|\mathbf{u}|$ c) $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ d) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e) مساحة متوازي الأضلاع الذي يشكل هذان المتجهان ضلعيه f) الزاوية بين المتجهين.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. يملك رباعي الأضلاع PQRS رؤوس الزوايا P(3,2)، Q(4,5)، R(9,6)، S(8,3).

a) استخدم المتجهات من أجل وصف الأضلاع الأربعة. $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{SR}$ and $\overrightarrow{PS}$

b) استخدم النتائج التي حصلت عليها من a) من أجل معرفة ما هو نوع رباعي الأضلاع هذا.

c) أوجد مساحة رباعي الأضلاع PQRS والمثلث PQR.

2. لتكن $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) أوجد $\mathbf{p.q}$ ، $\mathbf{q.p}$ ، $\mathbf{p.r}$، و$\mathbf{r.p}$ b) أوجد $\mathbf{p.p}$ ، $|\mathbf{p}|^2$، $\mathbf{q.q}$ و $|\mathbf{q}|^2$ c) $\mathbf{p.(q + r)}$، $\mathbf{p.q + p.r}$، $\mathbf{q.(p + r)}$، و $\mathbf{q.p + q.r}$ d) ما هي الخصائص المقترحة للضرب القياسي من إجاباتك في a) و b) و c) ؟ تحقق من هذه الخصائص باستخدام متجهات ثلاثية الأبعاد من اختيارك؟

3. تستخدم قاطرتين لسحب بارجة في مهرجان مياه عبر حبلان بطول متساو متصلان بنقطة واحدة على البارجة وبعيدان عن بعضهما بزاوية 32^0 درجة. إذا كانت كل قاطرة تسحب بقوة 2500 نيوتن، أوجد قوة الجذب التراكمية الفعلية.

4. a) تطير طائرة شراعية بسرعة 300 كم/ساعة إلى الجنوب. أوجد سرعتها الفعلية واتجاهها في حال تعرضت إلى رياح جنوبية شرقية بسرعة 40 كم/ساعة.

b) يحتاج قارب إلى الانتقال بأسرع وقت ممكن من مكان الصيد إلى مرساه في الميناء والذي يبعد مسافة 65 كم في اتجاه الشمال. في حال كانت سرعة القارب القصوى هي 80 كم/ساعة وكان هناك تيار شدته 10 كم/ساعة من الشمال الشرقي، في أي اتجاه على القارب السير ليضمن الوصول إلى المرسى؟ وكم سيستغرق حتى يصل؟

5. قم بالنظر لمثلث ABC مع رؤوس زوايا A(1,1)، B(5,-1)، C(4,-3). استخدم الآلة الحاسبة من أجل معرفة الضرب القياسي للتحقق فيما إذا كان المثلث قائم الزاوية. أوجد مساحة المثلث.

6. a) أوجد ثلاثة متجهات تتعامد مع $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) أوجد الصيغة العامة لكل المتجهات المتعامدة مع $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) صف المتجهات المتعامدة مع $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

d) أوجد الصيغة العامة للمتجهات المتعامدة مع هذه المتجهات:

i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix}$

ج) استكشف أسئلة مثل تلك في الأقسام من a) إلى d) في فضاء ثلاثي الأبعاد مع البدء بإيجاد المتجهات المتعامدة مع $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

ملاحظات من أجل المعلمين

يسلط هذا القسم الضوء على الطرق التي يمكن فيها للآلة الحاسبة كاسيو *ClassWiz* دعم الطلاب للتعامل مع المتجهات وكيفية استخدامها في تطبيقات الرياضيات العملية حيث قامت هذه الوحدة باستخدام نمط المتجهات بشكل مكثف إضافة إلى استخدام تدوين المتجهات المتوافق مع الآلة الحاسبة. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف جوانب المتجهات. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع زميل لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 22 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\sqrt{5} \approx 2.24$، $\sqrt{17} \approx 4.12$ ، $\sqrt{61} \approx 7.81$، $\sqrt{1.25} \approx 1.03$، $\sqrt{306} \approx 17.49$

c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -13 \\ 16 \end{bmatrix}$.

2. 36.87^o 3. $8\cos 20^o \approx 7.52$ و $8\sin 20^o \approx 2.74$ 4. كل الأطوال هي 13.

5. a) 21 b) 5 c) $\sqrt{37} \approx 6.08$ d) 46.33^o

6. 4 كم/ساعة b) 2 كم/ساعة c) 3.2 كم/ساعة في الاتجاه شمال-شرق 18.4^o

7. a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$ b) 17 c) 8.5 8. a) $\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ b) 4.583 c) 7.348

d) -28 e) $\begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ f) 18.71 g) 146.25^o

الأنشطة

1. يجب على الطلاب أن يتمكنوا من إدراك أن المتجهات المتساوية لزوج من الأضلاع تشير إلى أن الشكل متوازي أضلاع. بالتالي يعطينا الضرب المتّجهي مساحة متوازي الأضلاع وتكون مساحة المثلث هي نصف مساحة متوازي الأضلاع ذاك [الإجابات: المساحات هي 14 و 7].

2. إن المتجهات المختارة هنا هي من أجل استكشاف خصائص الضرب القياسي. حيث يوضح النشاط كيف أن عملية الضرب القياسي هي إبدالية وتوزيعية على المتجهات إضافة إلى أن الضرب القياسي لمتجه بنفسه يساوي مربع طوله. يجب تشجيع الطلاب على التحقق من المتجهات ثنائية وثلاثية أبعاد أخرى إضافة إلى التحقق بأنفسهم كيف أن النتائج بشكل عام صحيحة[الإجابات: a) 5، -11 b) 5، 25 c) -6، -6، -12، -12 d) كما في السابق]

3. من أجل هذه الأنواع من التطبيقات التي تنظر إلى التأثير المشترك لمتجهين، يعتبر رسم مخطط بياني أمرا ضروريا حيث يجب على الطلاب استخدام هذا الرسم من أجل رؤية أن القوة التي تتقدم للأمام من أجل كل قاطرة هي $2500 \cos 16^o$، بالتالي ستكون القوة المشتركة هي المجموع [الإجابة: 4806.3 نيوتن].

4. يتطلب القسم a) إضافة متجهين من أجل طائرة والرياح، بينما يتطلب القسم b) رسم المتجهات بحسب السياق لاتجاه كل من الزورق والتيار. شجع الطلاب على رسم المخططات البيانية. [الإجابات a) تتحرك الطائرة بسرعة 273.2 كم/ساعة في اتجاه 5.9^0 جنوب غرب. b) يتحرك المركب في اتجاه 16.87^0 شمال غرب بسرعة 53.33 كم/ساعة ويحتاج ساعة و13 دقيقة].

5. يسلط هذا النشاط الضوء على المتجهات المتعامدة والتي تملك ضرب قياسي يساوي صفر. بعد كتابة أضلاع المثلث على أنه ثلاثة متجهات $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ، يجب على الطلاب أن يجدوا أن $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$ ، بالتالي فإن المثلث هو قائم الزاوية عند B بمساحة هي $½ |AB||BC| = 5$ وحدة مربعة.

6. يستخدم هذا النشاط أيضا خاصية المتجهات المتعامدة والتي يكون الضرب القياسي لها يساوي الصفر ويمكن تعميم هذه النتيجة [الإجابة إن كل من a) وb) و c) هي متجهات متعامدة وهي عدد ضرب $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ث) عدد ضرب $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ج) المعادلة العامة $3x + y + 6z = 0$ تحدد مستوى عبر نقطة الأصل؛ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ عمودي على المستوي.

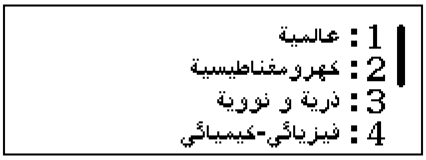
الوحدة التاسعة
مزيد من الأعداد

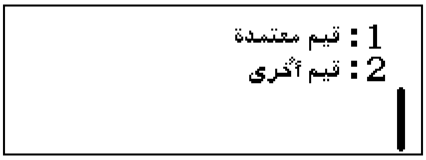
تتعامل الآلة الحاسبة كاسيو ClassWiz مع الأعداد الكسرية، العشرية و النسب المئوية، وذلك كما بينا في الوحدة 2، كما تستخدم أيضا الكتابة العلمية والهندسية عند الضرورة أو الرغبة. في هذه الوحدة، سوف نستكشف بعض الجوانب الأخرى المختلفة للأعداد والتي تتعامل معها الآلة الحاسبة. حيث تعد هذه الأعداد أقل عمومية وأكثر خصوصية، بالتالي لا يمكن الاستفادة منها إلا في حالات معينة و خاصة، في الدراسة أو الأعمال.

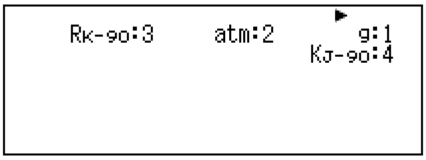
الثوابت العلمية (Scientific constants)

يجري استخدام الثوابت العلمية والهندسية وخاصة في العلوم الفيزيائية والهندسية. ومن أجل راحتكم، جرى وضع مجموعة مكونة من 47 متغير ضمن الحاسبة من أجل الاستخدام والاستعادة السريعة لها. هناك قائمة بتلك الرموز القياسية موجودة في دليل المستخدم، ولكنك هناك احتمال كبير أن معظم تلك الرموز مألوفة لك.

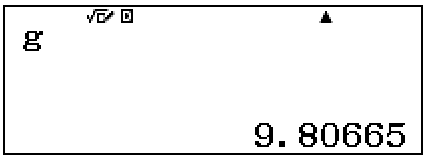
يمكن استعادة واستخدام هذه الثوابت في العمليات الحسابية عند الحاجة وذلك باستخدام أمر CONST (زري SHIFT 7) حيث يجري تجميع الثوابت بحسب مجالات التطبيق وذلك كما هو مبين أدناه. ويعرض المثال الموجود على اليسار شاشة القيم المعتمدة.







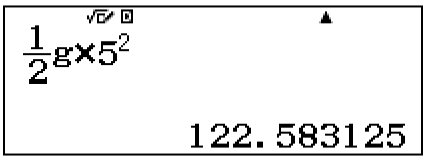
على سبيل المثال، يجري تمثيل التسارع الناتج عن جاذبية سطح الأرض برمز هو g حيث هو ثابت مهم في مختلف الحسابات المتعلقة بالأجسام الساقطة. يمكن استرداد القيمة المقبولة له عن طريق اختياره من شاشة قيم معتمدة بنقر 1 ومن ثم النقر على = كما هو موضح أدناه. ولكن في الوقت نفسه، ليس من الضروري استعادة القيمة بهذه الطريقة من أجل استخدامها في عملية حسابية.



إن السرعة v لكائن ساقط بعد t ثانية من إفلاته من أعلى معطى بالعلاقة:

$$v = \frac{1}{2}gt^2$$

بالتالي، من أجل تحديد سرعة سقوط مظلي بعد خمس ثوان من قفزه من الطائرة في سقوط حر، يمكن استخدام الآلة الحاسبة كما هو موضح هنا، مع استخدام الرمز g المستعاد كما هو موضح أعلاه.

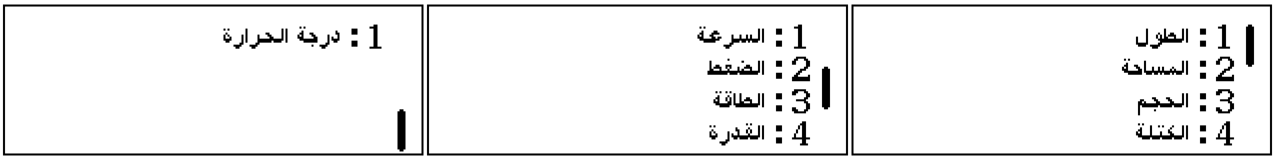


بالتالي فإن السرعة الناتجة هي 122.6 مترا في الثانية (حيث يفترض أن تكون الوحدات بالمتر والثواني هنا كما تكون في حالة العلوم الفيزيائية عموما). لاحظ أن الرقم نفسه لا يظهر على الآلة الحاسبة – فقط الرمز g كثابت. لاحظ أنه من الضروري في هذه الحالة أن يجري وضع علامة الضرب في العملية الحسابية.

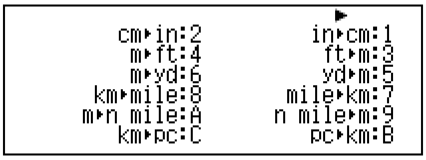
وتستند هذه الثوابت في الآلة الحاسبة على نسخة عام 2010 من قائمة لجنة البيانات للعلوم والتكنولوجيا (CODATA) للاستخدام الدولي. حيث يجري تنقيح الثوابت دوريا (إلى حد ما) وذلك مع قيام العلماء بشكل متكرر بالعمل على تحسين هذه القياسات؛ بالتالي يجب عليك النظر عبر الإنترنت في حال كنت ترغب في أن تكون على علم بهذه التفاصيل.

التحويل بين المقاييس

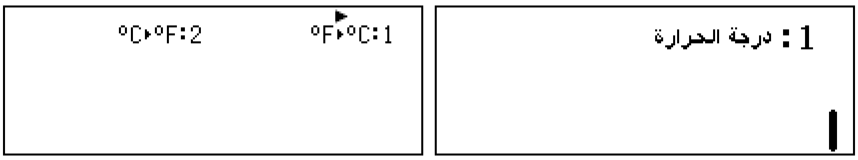
معظم المقاييس في العالم تستخدم النظام المتري في العلوم والتكنولوجيا ، ولكن لا تزال هناك بعض البلدان تستخدم أنظمة قياس أخرى. من أجل التحويل بين نظم الوحدات الشائعة، تملك الآلة الحاسبة 20 زوجا من وحدات التحويل. يتم تجميع هذه الوحدات ضمن تسعة مجالات قياس، وذلك كما هو مبين أدناه مع SHIFT 8 (CONV)، ومن ثم التنقل بمؤشري ▼ و▲ . (لاحظ أنه يمكنك استخدام ▲ للانتقال من آخر شاشة لأول شاشة).



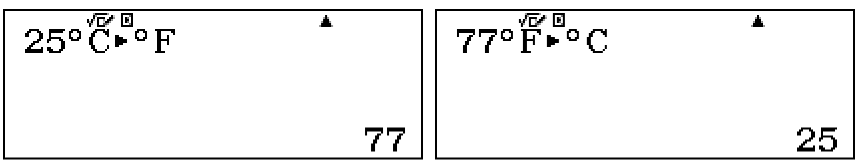
أزواج التحويل الأكثر شيوعا هي الطول (يمكن الوصول له عبر الطول بعد النقر على 1). تتم عملية التحويل بشكل داخلي وذلك باستخدام الرموز القياسية للوحدات المعنية. لاحظ (من رمز ◄ الموجود في الشريط العلوي) أنه يمكنك العودة إلى مجموعات القياس مع ◄ في حال لم يحدث التحويل الذي تريد.



وبشكل مشابه، يتوفر التحويل من الدرجة المئوية إلى درجة الفهرنهايت ضمن مجموعة درجة الحرارة الكائنة في الجانب الأيسر في الأسفل وذلك بعد النقر على 1.



لتحويل كمية على شاشة الآلة الحاسبة من وحدة قياس إلى أخرى، علينا أولا إدخال الكمية المطلوب تحويلها، ثم تحديد مجال التحويل المطلوب. على سبيل المثال، لتحويل درجة حرارة من 77 فهرنهايت إلى درجات مئوية، قم بإدخال رقم 77 (مع البدء بإزالة ما على الشاشة باستخدام المفتاح AC ، في حال كانت ما تزال التحويلات السابقة معروضة)، ثم انقر على التحويل المناسب ثم انقر =. تعرض الشاشة الأولى في الأسفل هذه العملية بينما تعرض الثانية التحويل بالعكس من 25 درجة مئوية إلى 77 درجة فهرنهايت.

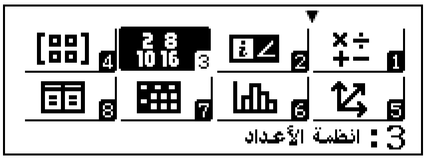


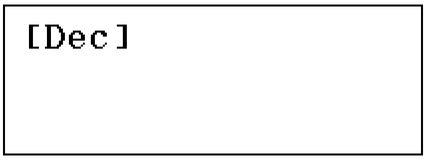
في هذه الحالة بالذات، ستقوم الآلة الحاسبة باستخدام العلاقة هذه $F = \frac{9}{5}C + 32$ للتحويل ذهابا وإيابا.

تستند التحويلات هذه على عمل المعهد الوطني للمعايير والتكنولوجيا (NIST) في الولايات المتحدة الأمريكية. يمكنك العودة إلى الإنترنت للحصول على معلومات أكثر تفصيلا. لكن في الوقت نفسه، من غير المرجح أن تتغير عوامل التحويل هذه فيما يتعلق بدقتها حيث يمكنك استخدامها بكامل الثقة الممكنة حتى من دون العودة إلى معهد NIST للحصول على التحديثات.

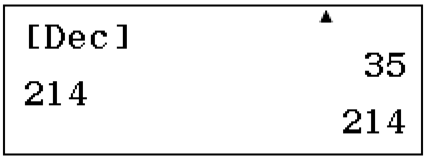
الأعداد لأساسات أخرى

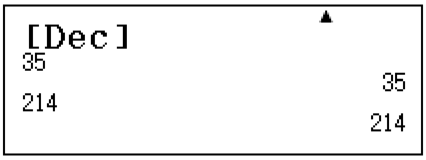
يستخدم نظام الأعداد العشري في جميع أنحاء العالم وهو النظام الأساسي المستخدم في تمثيل الأعداد في الآلة الحاسبة وذلك كما عرفنا في الوحدة 2. ولكن، ومن أجل بعض الأغراض المحددة (وعلى الأخص في علوم الكمبيوتر)، يمكننا استخدام أنظمة عد أخرى. يستخدم النظام العشري قاعدة 10، وهناك النظام الثنائي (قاعدته 2)، والنظام الثماني (قاعدته 8)، والنظام الست عشري (قاعدته 16). تسمح الآلة الحاسبة بإمكانية التحويل بين أنظمة الأعداد هذه. لاستخدام هذه الميزة، ضع الآلة الحاسبة على نمط انظمة الأعداد Base-N وذلك باستخدام الزر MENU 3 . الوضع الافتراضي للحاسبة هو النظام العشري وذلك كما تشير شاشة الحاسبة أدناه.



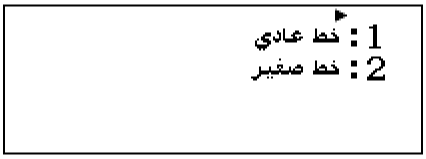


إذا قمت بإدخال الأعداد الكلية (مثل 35 أو 214) ثم نقرت على = ، سيجري الافتراض بأن نظام الأعداد عشري وذلك كما هو مبين أدناه.

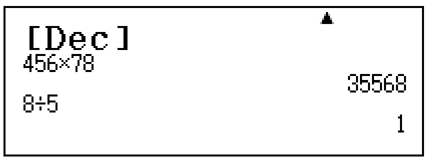


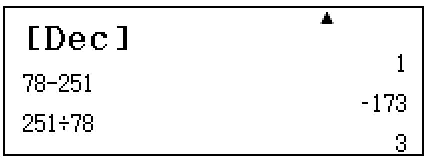


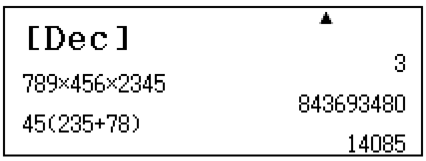
تعرض الشاشتان المذكورتان في الأعلى كيف يمكن استخدام الآلة الحاسبة بخط إما عادي أو صغير في هذا النمط وذلك باستخدام شاشة SET UP (عبر الزرين SHIFT MENU). يسمح لك الخط الصغير في بعض الأحيان برؤية المزيد من الكلمات في آن واحد حيث ستأخذ التغييرات مجراها بشكل فوري. اختر أي نمط تفضله (في هذا النموذج، سنستخدم كلا الحجمين – العادي والصغير – في أماكن متفرقة).



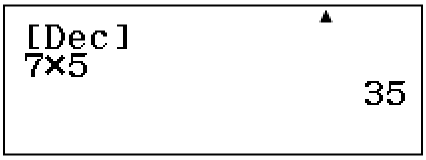
يمكن استخدام أعداد كلية فقط في نمط انظمة الأعداد Base-N. أما المفاتيح الأخرى، مثل الفاصلة العشرية أو الجذر التربيعي، فلن تعمل بشكل طبيعي، ويتم تجاهلها. يمكن استخدام العمليات مثل + ، − ، × ، و ÷ ، ولكن ستكون النتائج فقط أعداد صحيحة (بالتالي فإن الأجزاء العشرية لن تؤدي إلى فواصل عشرية مثلا). وبشكل مشابه، ستعطي الأرقام الكبيرة عبارة خطأ بدلا من أن يجري تمثيلها بالكتابة العلمية وذلك كما هو حال الأنماط الأخرى. قم بدراسة الشاشات الموجودة في الأسفل لرؤية بعض الأمثلة وجرب بعضها بنفسك في نمط DEC.



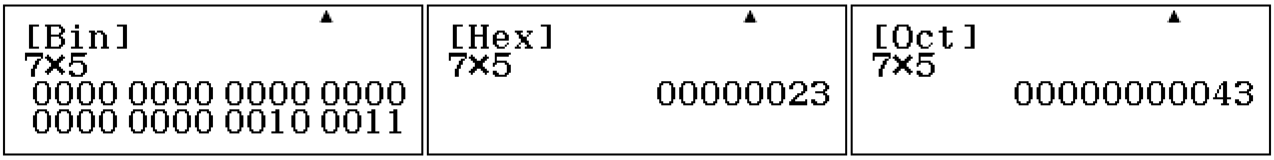




للانتقال من نظام عد إلى نظام آخر، قم بالنظر إلى أوامر DEC، HEX، BIN وOCT المكتوبة باللون الأزرق فوق أزرار x^2 و$x^{\blacksquare}$ و $\log_{\blacksquare}\square$ و ln على الترتيب. إذا قمت بالنقر فوق أي من هذه المفاتيح، سيجري عرض نتائج العمليات الحسابية وفقا لنظام الأعداد الذي اخترته. ومن أجل رؤية كيفية عمل هذا، اضغط زر AC لإزالة كل ما على الشاشة، ومن ثم أكمل الحساب كما هو موضح في الأسفل.



ثم اضغط على مفاتيح OCT أو HEX أو BIN لمعرفة النتيجة نفسها ضمن أنظمة العد الثلاثة الأخرى:



قم بدراسة هذه الشاشات بعناية مع تجاهل أي أصفار في المقدمة. وعلى اعتبار أن نظام العد الثماني يستخدم الأساس 8 بدلاً من 10، بالتالي يعني العدد 43_8 في الشاشة الأولى (بنظام العد الثماني كما هو مبين برقم 8 الصغير) تساوي: $4x8 + 3 = 35$ بنظام العد العشري.نظام الست عشري يستخدم الأساس 16 فالشاشة الثانيةتعرض $23_{16} = 2x16 + 3 = 35$ بنظام العد العشري .أما في حالة النظام الثنائي، فهو يستخدم نظام العد الثنائي الأساس 2، بالتالي تعرض الشاشة الثالثة العدد 100011_2 والذي هو:

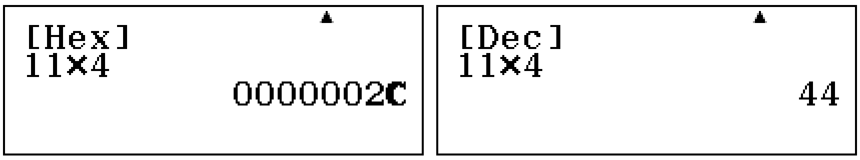
$1x32 + 0x16 + 0x8 + 0x4 + 1x2 + 1 = 35$

وذلك في حال جرى كتابة الأعداد بنظام العد العشري. بالتالي فإن النتائج الموجودة في الأعلى هي نفسها إنما هي ممثلة بأنظمة عد مختلفة.

لاحظ أن العملية الحسابية التي أدخلتها كانت (7 × 5 في هذه الحالة) لا تتأثر بهذه التغييرات وتبقى على حالها على الشاشة مع كل نظام جديد.

عندما يتم اختيار نظام أعداد باستخدام واحد من المفاتيح الزرقاء الأربعة، ستكون قادرا على إدخال الأعداد التي يفهمها ذاك النظام. بالتالي، في النظام الثنائي، لا يمكنك إدخال سوى 0 أو 1. إدخال أي عدد آخر سيعرض لك عبارة خطأ صياغة (Syntax Error). وبشكل مشابه، لا يمكن استخدام 8 و9 في نظام العد الثماني (وبنفس الطريقة التي لا يمكن فيها استخدام رموز في نظام العد العشري).

أما النظام الست عشري، فيتطلب بعض الرموز الإضافية (لتمثيل الأعداد من 10 إلى 15)، ويكون أحيانا واضح عند تحويل الأعداد إلى نظام الست عشري كما هو في الأسفل:



في نظام الأعداد الست عشري، يجري تمثيل ناتج ضرب 11 × 4 = 44 على أنه 2C حيث يشير الرمز C إلى الرقم 12 في النظام العشري، بحيث يكون لدينا $44 = 12 + 2x16 = 2C_{16}$ وذلك في النظام العشري.

لإدخال الأعداد الست عشرية في الآلة الحاسبة، استخدم صف المفاتيح الحمراء (من A إلى F) (والتي يجري استخدامها في مواطن مختلفة كمفاتيح ذاكرة) ولكنها في هذا النمط هي تكملة أعداد النظام الست عشري. حيث تمثل هذه الرموز مايلي (مقارنةً بالنظام العشري):

A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15

لاحظ أنه يمكنك استخدام هذه المفاتيح فقط عندما يجري وضع الآلة الحاسبة في النظام الست عشري. في حال جرى وضعها في أي نظام آخر، ستحصل على رسالة خطأ صياغة. إليك مثال حول تحويل عدد من نظام ست عشري إلى عشري ومن ثم إلى ثماني. ضع الآلة الحاسبة على النظام الست عشري (باستخدام [$x^{■}$]) ثم أدخل AB (باستخدام مفتاحي [°'"] [(−)]) ثم انقر على [=]. اضغط على [x^2] و [ln] من أجل التحويل لأنظمة عد أخرى.

```
[Oct]
AB
        00000000253
```

```
[Dec]
AB
                171
```

```
[Hex]
AB
           000000AB
```

لاحظ أن $AB_{16} = 10x16 + 11 = 171$ في النظام العشري.كذلك $253_8 = 2x64 + 5x8 + 3 = 171$ في النظام العشري .لاحظ مرة أخرى كيف أن العدد المكتوب بالنظام الست عشري (AB) بقي على يسار الشاشة.

إذا قمت بإجراء سلسلة من العمليات الحسابية، تذكر بأن رمز [▲] الصغير في الشاشة يشير إلى أن إمكانية استعادتها حيث تغيير نظام الأعداد سوف يؤثر فقط على العملية الحسابية الأخيرة، ولكن يمكنك تغير أساس العمليات الحسابية الأخرى التي جرى إدخالها في الشاشة باستخدام [▲]. قم بدراسة الشاشات التالية بعناية لمعرفة كيف يعمل هذا مع مثال لعمليتين حسابيتين جرى إدخالهما في النظام الثماني ثم جرى تحويلهما إلى النظام العشري مع الزر DEC ([x^2]). لقد جرى التحويل الأول – المعروض في الشاشة الوسطى – فورا، ولكن التحويل الثاني جرى عندما جرى النقر على [▲].

```
[Dec]
4×2
                  8
```

```
[Dec]
4×2
        00000000010
14×7
                 84
```

```
[Oct]
4×2
        00000000010
14×7
        00000000124
```

هناك طريقة أخرى لإدخال الأعداد ذات الأساسات المختلفة في نمط انظمة الأعداد Base-N وذلك باستخدام قائمة OPTN. انقر على [OPTN] [▼] للدخول إلى الشاشة الثانية لرؤية الإختصارات الأربعة الموضحة أدناه.

```
    h:2         d:1
    o:4         b:3
```

إذا تم إدخال أرقام مع مختصر، يمكن عرض الأعداد لأساسات مختلفة في نفس الشاشة حيث تعرض الشاشة الأولى مجموع العددين 23_8 و17_{16} في النمط العشري. أما الشاشة الثانية فتعرض كيف أن ضرب عدد ثنائي بـ 4 يمكن أن يتحقق عن طريق إضافة صفرين بعد الرقم. (لماذا؟) لاحظ كيف يجب أن يسبق الإختصار العدد.

```
[Oct]
23+17
        00000000042
```

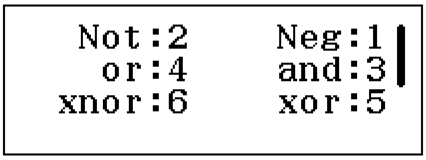
```
[Bin]
1011×d4
 0000 0000 0000 0000
 0000 0000 0010 1100
```

```
[Dec]
o23+h17
                 42
```

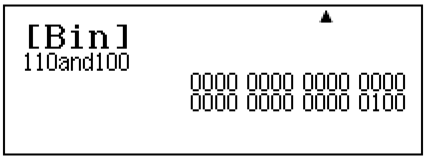
عندما لا تملك الأعداد أي مختصر، يجري الافتراض بأنها تنتمي لنظام الأعداد الحالي. بالتالي فإن الشاشة على اليسار أعلاه في نظام العد الثماني تعرض $23_8 + 17_8$. تحقق بنفسك من أن كلا الإضافتين صحيحتان.

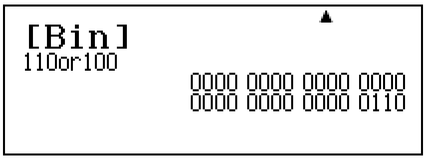
العمليات المنطقية بالنظام الثنائي

تحوي قائمة OPTN في نمط انظمة الأعداد Base-N أيضا مختلف العمليات المنطقية والمستخدمة للعمل مع نظام الأعداد الثنائية. بالتالي، قم من أجل هذا القسم بتعيين الحاسبة ضمن نظام الأعداد الثنائية عن طريق مفتاح log الأزرق. بالتالي يجري عرض قائمة OPTN في الأسفل.

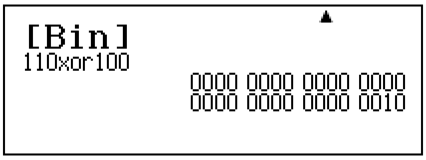


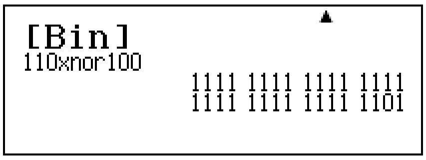
يستخدم ما سبق في علوم الحاسب الآلي لإجراء عمليات خاصة بالنظام الثنائي. على سبيل المثال، تقوم عملية and بإنتاج رقم ثنائي (وهو 1) في حال تطابق الخانة في كلا العددين اللذان تجري مقارنتهما تحوي 1. في حالة لم يكونا كذلك، يكون الناتج 0. من أجل العددين 110_2 و100_2 على سبيل المثال، نرى كيف أن الخانة الأولى في كلا العددين فيها العدد 1، أما باقي الخانات، فمختلفين بينهما. أما فيما يتعلق بالخاصية or فهي تقوم بإنتاج 1 في حال كان إما/*أحد* العددين أو كلاهما يحويان الرقم 1 ضمن الخانات المتقابلة. في نفس المثال الخاص بالعددين السابقين، 110_2 و 100_2، نرى بأن الحالة صحيحة من أجل أول خانتين. تعرض الشاشات في الأسفل هذه الأوامر في حالة الاستخدام.



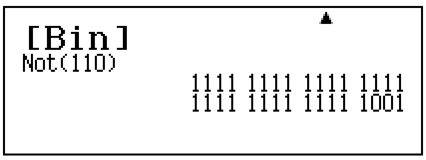


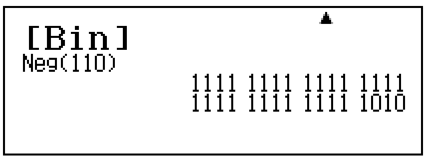
أما بالنسبة للرياضيات بشكل عام، فإن أمر or هو أمر *or شامل* (inclusive or) (أي إما الأول أو الآخر أو كلاهما). من ناحية أخرى، هناك أمر يدعى xor والذي هو أمر *or حصري* (exclusive or) والذي يعني أنه يجب أن يكون الأول أو الآخر *ولكن ليس* كلاهما. من أجل 110_2 و100_2، نرى فقط أن الخانة الثانية في كلا العددين تتلاقى مع هذا المعيار. أما أمر xnor فهو على العكس من ذلك، كما هو مبين أدناه حيث يقوم بإعطاء 1 كلما تطابقت الأزواج مع وجود 0 واحدة مختلفة (في أي مكان). يمكنك أن ترى ذلك في الشاشة الثانية في الأسفل إلى اليسار مع آخر مجموعة أعداد (تحديدا 101).





وأخيرا، لدينا أمرا النفي *Not* و *Neg* واللذان يطبقان على الأعداد الثنائية الفردية. يقوم أمر Not بتبديل خانتي 1 و 0 في الرقم. أما أمر Negative، فيعطي المكملين الاثنين لأي عدد ويجري استخدامه في تصميم عمليات الحاسوب. (يمكنك أن ترى من الشاشات أدناه كيف أن نفي (Negation) عدد هو أكبر بواحد عن ذاك المعطى بأمر Not).





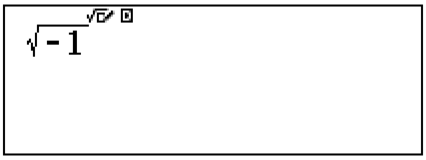
بالطبع، من المرجح أن تكون تلك العمليات ذات فائدة فقط لمن يعمل بشكل واسع مع الأعداد الثنائية لا سيما في مجالات علوم الكمبيوتر.

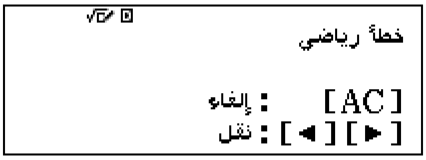
الأعداد المركبة

تعتبر الأعداد المركبة جزءا هاما في مجال الرياضيات المتقدمة، وربما قد لاحظت كيف ظهرت بشكل تلقائي في الوحدة 4 حيث يطلق عليها أحيانا الأعداد التخيلية، وذلك بالرغم من أنها ليست أعدادا تخيلية وحالها حال أي عدد آخر. ويعتبر العدد المركب الأساسي المعروف على نطاق واسع هو الجذر التربيعي لناقص 1 والممثل بالرمز i.

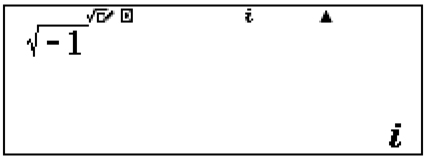
$$\sqrt{-1} = i$$

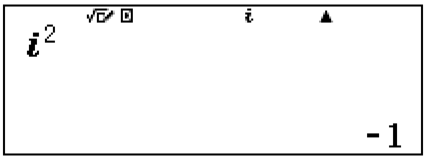
إذا حاولت تحديد هذا على الآلة الحاسبة في نمط الحساب، ستحصل على رسالة خطأ رياضي:





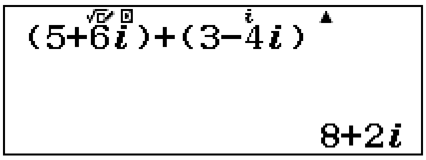
لكن في حال قمت بالتحويل إلى نمط الأعداد المركبة Complex (عبر الضغط على MODE 2)، لن ترى شاشة الخطأ تلك:

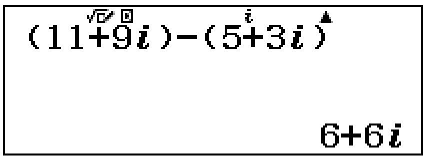




لاحظ كيف تعرض الآلة الحاسبة رمز i صغير في الأعلى للإشارة إلى نمط الأعداد المركبة Complex الحالي (ربما رأيت هذا الرمز في الوحدة 4 أثناء قيامك بحل المعادلات كثيرات الحدود). عندما تكون في نمط الأعداد المركبة Complex، يمكن الحصول على العدد i نفسه عبر النقر على مفتاح ENG كما هو موضح من خلال رمز أرجواني صغير فوق المفتاح. (ليس من الضروري النقر على مفتاح SHIFT هنا). تتمثل الخاصية الجوهرية من أجل i في أن مربعه هو 1- وذلك كما هو موضح في شاشة الآلة الحاسبة أعلاه.

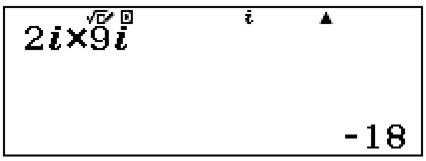
يمكن إجراء عمليات الحساب المركبة على الآلة الحاسبة هذه وذلك بالرغم من توقف بعض وظائف الآلة الحاسبة عن العمل مع الأرقام المركبة. عندما يجري جمع وطرح الأرقام المركبة، تعرض الشاشات في الأسفل الأجزاء الحقيقة ثم الأجزاء التخيلية والتي يجرى التعامل معها بشكل منفصل للحصول على النتيجة النهائية.

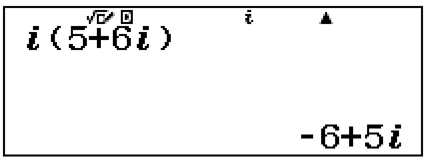




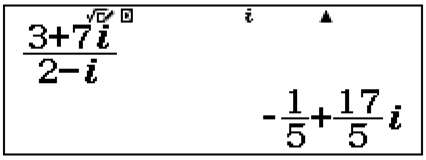
لاحظ كيف تعرض *ClassWiz* الجزء الحقيقي من الأعداد المركبة أولا.

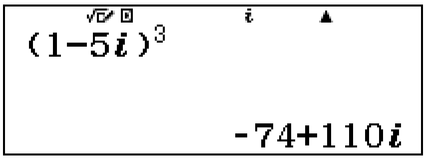
تعتمد عملية الضرب بـ i أو مضاعفات i على الخاصية القائلة بأن $i^2 = -1$، كما هو مبين أدناه:

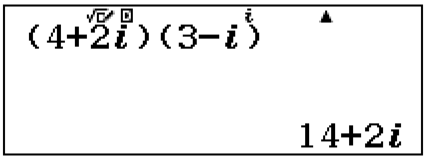




وهنا بعض الأمثلة الأخرى والتي تبين كيف تعمل عملية الضرب والقسمة:





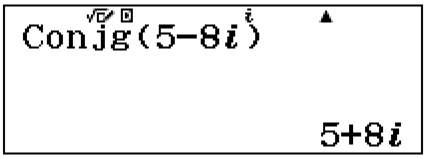


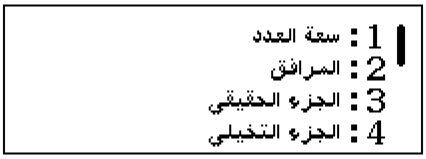
لاحظ في الحالة الثالثة كيف أن المقام قد تم تعديله ليعرض عددا منطقيا تلقائيا (بحيث لا يكون هناك أي عدد تخيلي في المقام). من أجل رؤية كيف قامت الآلة الحاسبة بهذا، قم بدراسة كيف يجري التعبير عن عملية التقسيم من أجل تفادي أي أعداد تخيلية في المقام:

$$\frac{3+7i}{2-i}=\frac{3+7i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{-1+17i}{4-i^2}=\frac{-1+17i}{5}$$

تعتمد هذه العملية على ضرب $2-i$ بـ $2+i$ في المقام؛ يبقى الجزء الحقيقي من العدد على حاله، بينما ينقلب الجزء التخيلي من العدد. ويجري وصف $2+i$ على أنه مرافق (conjugate) $2-i$.

تتوفر الأوامر المركبة في نمط الأعداد المركبة عن طريق القائمة OPTN حيث تعرض الشاشة في الأسفل كيف يمكن العثور على مرافق العدد (على الرغم من أن العملية قد تكون سهلة لدرجة القيام بها ذهنيا وذلك في حال كان الأمر ينطوي على عدد تخيلي واحد فقط).

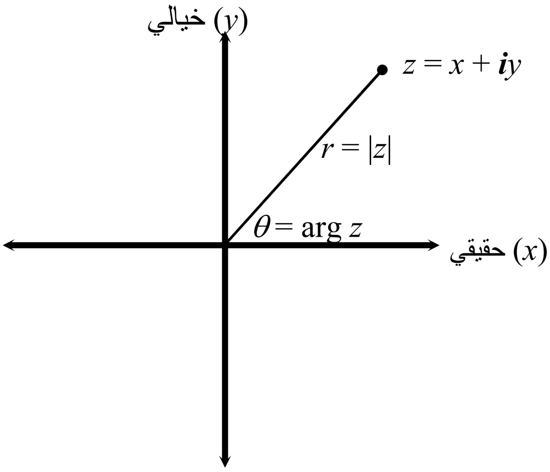




رسوم أرغند البيانية (Argand diagrams)

غالبا ما يجري تميل الأعداد المركبة بيانيا حيث يجري تمثيل الرقم الحقيقي بنقطة على خط الأعداد، يمكن تمثيل العدد التخيلي $z = x + iy$ بشكل نقطة في المستوى المركب حيث يملك هذا المستوى محور حقيقي x ومحور تخيلي y.

ويدعى الرسم البياني الذي يمثل الأعداد المركبة بهذه الطريقة باسم الرسم البياني لأرغند.

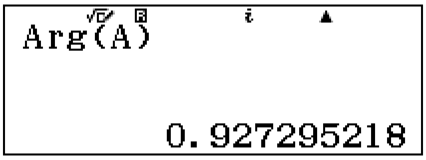


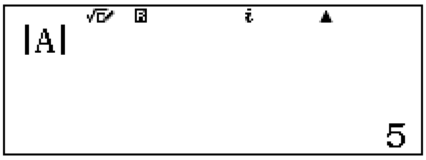
كما يعرض الرسم البياني لأرغند طول أو القيمة المطلقة لعدد مركب ممثلا بالصيغة $r = |z|$ والتي يمكن أن تفكر بها هندسيا على أنها المسافة من الأصل. وسوف تساعدك نظرية فيثاغورس على رؤية كيف أن:

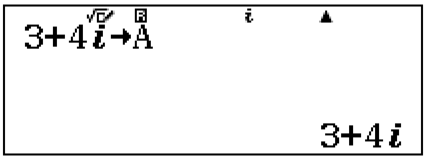
$.r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ويطلق على الزاوية عند نقطة الأصل مع المحور x الموجب الحقيقي اسم سعة العدد **argument** ويرمز له بالرمز arg z.

على الرغم من إمكانية قيامك بتحديد هذه القيم من المكونات الحقيقية والتخيلية لعدد مركب، من الأسهل استخدام الوظائف المدمجة في T. تعرض الشاشات التالية في الأسفل كيف جرى ضبط الآلة إلى الراديان وكيف جرى حفظ العدد المركب a = 3 + 4i في الذاكرة A من أجل الملاءمة.







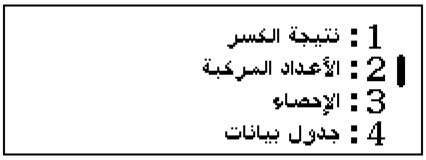
تعتبر دالة المقياس (سعة العدد) هي نفس دالة القيمة المطلقة (Abs) من أجل الأعداد الحقيقية (ويمكن الحصول عليها عبر SHIFT ( ). وتتوفر دالة سعة العدد **argument** من خلال القائمة OPTN.

سيكون التفكير في الأعداد المركبة بشكل هندسي أمرا مفيدا للغاية. على سبيل المثال، إن مرافق عدد حقيقي هو انعكاس الرقم حول المحور x الحقيقي.

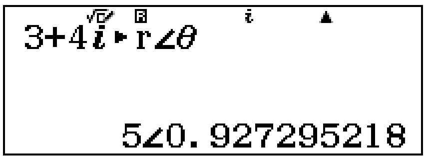
الصيغة القطبية (Polar form)

بسبب التأويلات الهندسية، يجري تمثيل الأرقام المركبة أحيانا بشكل قطبي (أي المسافة عن نقطة الأصل وزاويته مع المحور x الموجب الحقيقي. بالتالي يمكن تمثيل العدد المركب $a = 3 + 4i$ بصيغة إحداثيات هي (3,4)أو بصيغة قطبية هي [5,0.9273] (يجري تمثيل الإحداثيات القطبية بأقواس مربعة لتفادي الخلط بينها وبين الإحداثيات العادية في المستوى).

ولكون هناك تمثيلين محتملين للأعداد المركبة، يمكنك اختيار أي تمثيل تريده من قائمة الإعدادات SHIFT MENU (في الصفحة الثانية منها). انقر على 2 واختر إحدى الصيغتين.

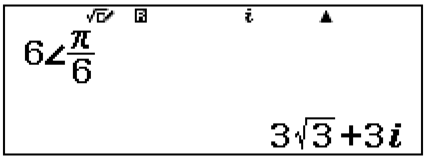


تسمح لك الآلة الحاسبة بالتحويل بين هاتين الصيغتين عبر الوصول إلى الصفحة الثانية من القائمة OPTN. تأكد من قيامك بتعيين الآلة الحاسبة على وضع Math وذلك باستخدام قائمة الإعدادات SET UP إذا لزم الأمر. تعرض الشاشتين أدناه كلا الاحتمالين.



عند إدخال الأرقام بشكل قطبي إلى الآلة الحاسبة، ستحتاج للوصول إلى رمز سعة العدد **argument** (رمز الزاوية) عبر استخدام (∠) (-) SHIFT ، ويستخدم بعد الطول وقبل الزاوية.

حاليا، جرى تعيين آلتنا الحاسبة لكي تعرض الوضع الأعداد المركبة في صيغة إحداثيات على غرار **a + bi**. بالتالي، إذا جرى الحصول على نتيجة، أو جرى إدخال رقم، سيجري تمثيله بشكل تلقائي في هذه الصيغة وذلك كما هو موضح في الشاشة الأولى أدناه، ولن تكون هناك حاجة إلى أمر التحويل.

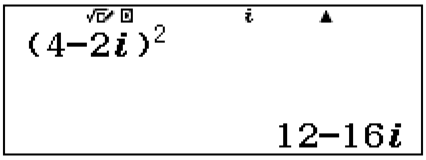


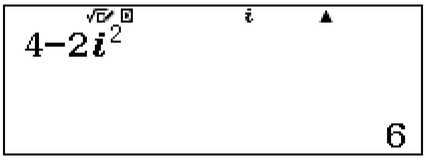
تحقق بنفسك من أنه إذا تم تعيين الحاسبة لإظهار الأعداد المركبة بصيغة قطبية ثم جرى إدخال $3\sqrt{3} + 3\boldsymbol{i}$، سيؤدي ذلك إلى عرض النتيجة بالصيغة القطبية كما هو الحال في الشاشة الثانية أعلاه.

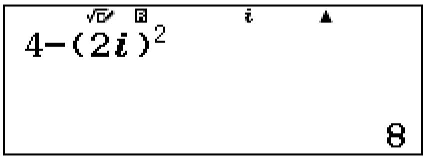
قوى وجذور الأعداد المركبة

ربما قد لاحظت بالفعل كيف يمكنك استخدام مفاتيح التربيع x^2 والتكعيب x^3 والمقلوب x^{-1} مع الأعداد المركبة، ولكن ليس مفتاحي الجذر $\sqrt{\blacksquare}$ أو الأس $x^{\blacksquare}$ (باستثناء قوى الأعداد الكلية). يعود السبب إلى أن الآلة الحاسبة تستخدم عمليات الضرب والقسمة داخليا من أجل هذه القوى الخاصة، ولكنها تستخدم طرقا مختلفة من أجل حساب الجذور والأسس الأخرى لهذه الأعداد (حيث تقوم بذلك باستخدام اللوغاريتمات)؛ وعلى اعتبار أنه لم يجر تعريف لوغاريتمات الأعداد المركبة، سيظهر خطأ رياضي في حال جرى استخدام مفتاحي $\sqrt{\blacksquare}$ أو $x^{\blacksquare}$ معها.

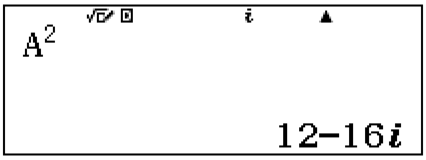
عند استخدام مفاتيح القوى، انتبه بشكل كبير لكيفية إدخالك للتعبيرات. قم بدراسة الشاشات الثلاثة التالية بعناية. تعرض الشاشة الأولى في الأسفل الطريقة الصحيحة لتربيع العدد $4 - 2\boldsymbol{i}$، أما الشاشة الثانية فتعرض كيف أن النقر على مفتاح x^2 مباشرة بعد الرقم سيقوم بتربيع فقط الجزء i في الجزء المركب من العدد وهذا الأمر غير صحيح. وبشكل مشابه، ينطبق التربيع في الشاشة الثالثة فقط على الجزء المركب من العدد.







في الشاشة أدناه، جرى تخزين العدد المركب $4 - 2\boldsymbol{i}$ للتو في الذاكرة $\boldsymbol{A}$، بالتالي يمكن تربيعه باستخدام المفتاح x^2.

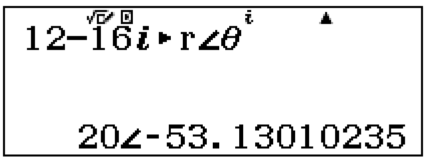


للحصول على قوى أو جذور كسرية لأعداد مركبة، ستحتاج إلى استخدام النتيجة المميزة التي تدعى صيغة دي موافر (*De Moivre's Theorem*): لأي عدد مركب في صيغة قطبية $[r, \theta]$،

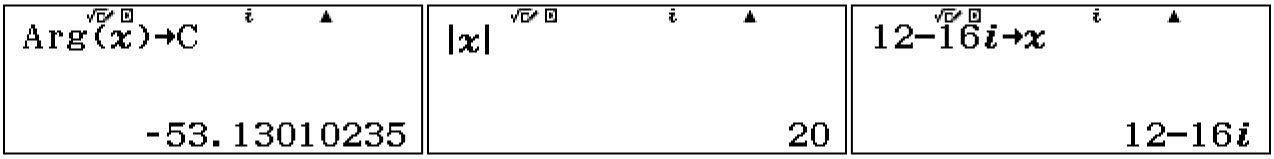
$$.[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$$

على سبيل المثال، يمكنك استخدام هذه النتيجة مع $n = ½$ لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب $12 - 16\boldsymbol{i}$.

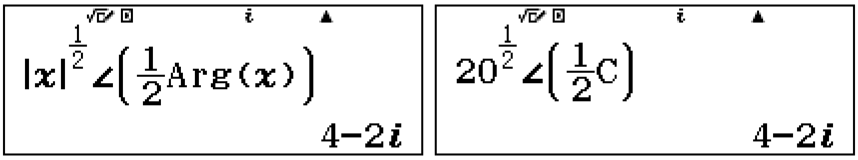
أولا لا بد من التعبير عن الرقم بصيغة قطبية. على الرغم من أن الأمر الموجود في الأسفل قادر على تحقيق ذلك، فإنه لا يعتبر مفيدا جدا لباقي العملية الحسابية (لأنه يتطلب تدوين الزاوية، بالتالي هناك فقدان دقة محتمل):



لذا، فإن النهج الأفضل يتمثل بإيجاد الطول (r) الزاوية (θ) بشكل منفصل، وذلك كما هو موضح في الشاشات التالية. ومن أجل توفير بعض الخطوات، قم في البداية بتخزين العدد في الذاكرة x. من الحكمة تخزين نتيجة الزاوية الممثلة بعدد غير صحيح في الذاكرة وذلك للاحتفاظ بكل الدقة المتوفرة.



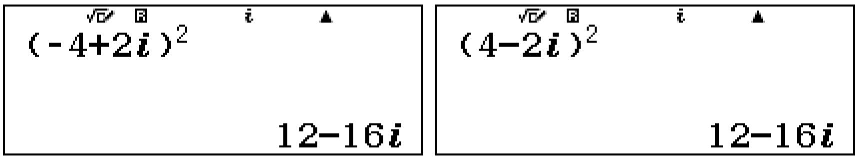
بعد ذلك، يتوفر الجذر التربيعي مباشرة عبر صيغة دي موافر حيث تعرض الشاشة الأولى في الأسفل القيم التي تم الحصول للتو، بينما تعرض الشاشة الثانية كيف أنه من غير الضروري الحصول على هذه القيم أو عرضها من أجل استخدامها.



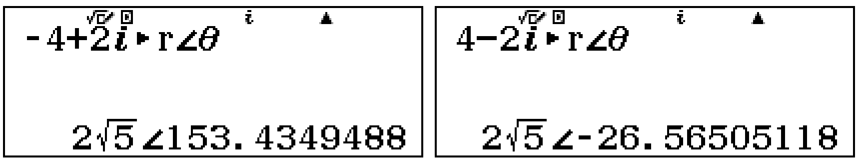
يتم الحصول على الجذر التربيعي الآخر ذهنيا وذلك بعكس إشارات الناتج:

$$-(4 - 2\boldsymbol{i}) = -4 + 2\boldsymbol{i}.$$

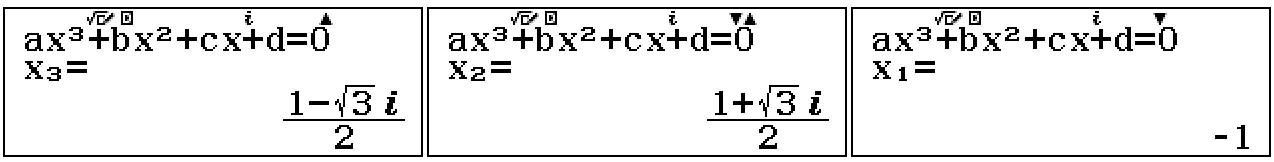
يمكنك التحقق من أنها في الواقع الجذور التربيعية من أجل $12 - 16\boldsymbol{i}$ وذلك عن طريق تربيع النتائج:



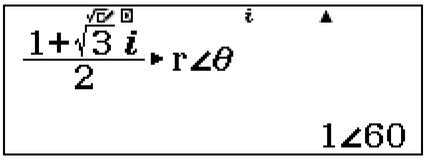
على رسم أرغند، تعاكس الجذور التربيعية بعضها البعض في دائرة مركزها نقطة الأصل. ويمكن ملاحظة ذلك أنه جرى عرض الجذرين بصيغة قطبية. تحقق في الأسفل من أن كلا الجذرين يساوي $2\sqrt{5}$ من نقطة الأصل وبأن الزوايا تبعد عن بعضهما 180^0.

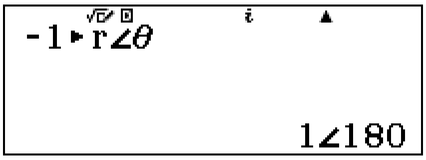


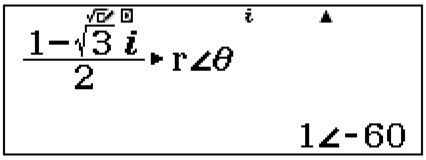
ربما قد لاحظت في الوحدة 4 كيف أن حلول بعض المعادلات يكون أعداد مركبة عند الضرورة. على سبيل المثال، نرى الجذور الثلاث للاصطلاح $x^3 + 1 = 0$ معروضة في الأسفل في نمط المعادلة/الدالة:



ومع إمكانية كتابة المعادلة بالشكل $x^3 = -1$، يمكن النظر إليها على أن ثلاث جذور تكعيبية لـ 1-. وبالعودة إلى نمط الأعداد المركبة، عندما يجري التعبير عن هذه الحلول بصيغة قطبية، يكون من الواضح أنه على الرسم البياني لأرغند فإن الجذور الثلاثة متوفرة على مسافة واحدة من الدائرة، على مسافة 1 وحدة من نقطة الأصل و 120^0 عن بعضها البعض.







تمارين

تساعدك هذه التمارين على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. يزن طفل 3.3 كغ عند ولادته. كم يكون وزنة بالرطل والأونصة؟ (يوجد 16 أونصة في كل باوند)
2. أفاد موقع إنترنت بأن المسافة من شيكاغو إلى نيويورك هي 789 ميل. استخدم الآلة الحاسبة من أجل تحويل هذه المسافة إلى كم.
3. قم بتحويل العدد الممثل بنظام الأعداد العشرية 62 إلى عدد بنظام الست عشري، ثم الثماني ثم الثنائي.
4. أوجد $12_8 + 57_8 + 14_8$.
5. استخدم العمليات الثنائية المنطقية من أجل إيجاد 11010 و 10011. فسر نتائجك.
6. أوجد الجذرين التربيعيين لـ 9-.
7. أوجد $(6 - \boldsymbol{i})(4\boldsymbol{i} + 5)$.
8. أوجد $(3 + \boldsymbol{i}) \div (2 + \boldsymbol{i})$.
9. أوجد المرافق والقيمة المطلقة وسعة العدد(الزاوية) من أجل $4 - 7\boldsymbol{i}$.
10. عبر عن $12 + 5\boldsymbol{i}$ بالصيغة القطبية.
11. عبر عن $\left[6, \frac{2\pi}{3}\right]$ بصيغة الإحداثيات.
12. أوجد $(3 + 7\boldsymbol{i})^5$,
13. أوجد $(4 - \boldsymbol{i})^{-3}$.
14. استخدم نظرية دي موافر لإيجاد الجذرين التربيعيين لـ $32 - 24\boldsymbol{i}$.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. لاحظ كيف أن التحويلات المترية في الآلات الحاسبة هي في أزواج. على سبيل المثال يكون لدينا تحويل من قدم إلى متر، والتحويل المرافق من متر إلى قدم.

أوجد عاملي التحويل. كيف يكون عاملي التحويل هذين مرتبطان ببعضهما البعض؟

قم بفحص أزواج أخرى لدعم نتائجك.

2. ما هو أثر ضرب عدد بواسطة أساسه؟ ربما قد لاحظت كيف أنه يجري مضاعفة الأعداد بالنظام العشري عبر ضربها بعشرة، أي أن 23 × 10 = 230، ولكن تحقق من ذلك من أجل الوحدات الأخرى أيضا.

على سبيل المثال، اضرب 1011_2 بـ 2، و234_8 بـ 8، و$3A2D_{16}$ بـ 16.

جرب أمثلة بالقدر الكافي لرؤية نماذج متوافقة مع بعضها البعض وفسر ما الذي لاحظته.

3. قارن بين التمثيلات الثمانية والثنائية للأعداد بشكل دقيق. على سبيل المثال، يكون التمثيل الثنائي للعدد الثماني 534 هو 101011100؛ لاحظ كيف أن هذا العدد الثنائي منقسم إلى ثلاثة أجزاء كل منها مؤلف من ثلاثة خانات 101 و011 و100 وهي التمثيلات الثنائية من أجل 5، و3 و4 على الترتيب.

جرب هذه الفكرة على أعداد أخرى بالنظام الثماني.

قارن أرقام للنظامين الثنائي والست عشري بنفس الطريقة.

4. كيف يمكن مقارنة ناتج حاصل ضرب عدد مركب ومرافقه مع القيمة المطلقة لهذا العدد؟

ابدأ عبر تجربة بعض الأمثلة مثل $4 + 3\boldsymbol{i}$ أو $6 - 2\boldsymbol{i}$.

عندما تكون العلاقة واضحة بالنسبة لك، فسر لماذا تحدث وكيف تتعلق بعملية إنطاق عملية قسمة عدد مركب على آخر.

5. فسر لماذا ضرب عدد مركب بـ i يملك نفس أثر تدوير موقعه على رسم أرغند بمقدار 90^0 عكس اتجاه عقارب الساعة.

6. أوجد الجذور التكعيبية الثلاث لـ 8-، أيها هي الحلول من أجل المعادلة $x^3 + 8 = 0$. استخدم صيغة دي موافر من أجل القيام بذلك. وتحقق من النتائج باستخدام نمط المعادلة/الدالة في الآلة الحاسبة من أجل حل المعادلة. (عد للوحدة 4 للمزيد من التفاصيل عن هذا النمط عند الضرورة)

قم برسم حلك على الرسم البياني لأرغند ولاحظ علاقاتها مع بعضها البعض.

كرر هذه العملية من أجل إيجاد جذور أعداد أخرى.

ملاحظات من أجل المعلمين

قمنا في هذه الوحدة باستخدام آلة *ClassWiz* من أجل التعامل مع عمليات التحويل بين المقاييس، إضافة إلى الثوابت العملية، تمثيل الأعداد بإساسات مختلفة و التعامل مع الأرقام المركبة. سيحتاج العديد من

الطلاب إلى بعض الأجزاء فقط من هذه الوحدة وذلك اعتمادا على السياق الرياضي. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف التمثيلات الخاصة بالأعداد. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. 7 أرطال و4 أونصات. (التحويل من الكيلوغرام إلى الأرطال ومن ثم ضرب الأرطال بـ 16 من أجل التغيير إلى أونصات.

2. 1270 كم (إلى أقرب كيلومتر)
3. $3E_{16}$، 76_8 و111110_2.
4. 105_8

5. 10010 ويظهر كيف أن الخانات التي فيها 1 من أجل كلا العددي هما الأولى والرابعة من اليسار.

6. $3\boldsymbol{i}$ و$-3\boldsymbol{i}$. (تعطي الآلة الحاسبة فقط الأول منها).
7. $34 + 19\boldsymbol{i}$
8. $\frac{7}{5} - \frac{i}{5}$
9. $4 - 7\boldsymbol{i}$، $\sqrt{65}$، 1.052
10. $[13,0.395]$
11. $-3 + 3\sqrt{3}\boldsymbol{i}$
12. $23028 - 11228\boldsymbol{i}$
13. $\frac{52}{4913} + \frac{47}{4913}i$
14. $6 - 2\boldsymbol{i}$ و $-6 + 2\boldsymbol{i}$

نشاطات

1. سيسمح هذا النشاط للطلاب برؤية كيف أن تحويلان إثنان هما مقلوب بعضها لبعض. حيث من أجل إيجاد عامل، سيحتاجون إلى "تحويل" القياس لـ 1 وذلك باستخدام التحويل المناسب. ويمكن رؤية العلاقة بين العاملين بشكل أكثر سهولة باستخدام مفتاح x^{-1}. كما من الممكن أيضا تحويل المقاييس في اتجاه ومن ثم تحويلها مباشرة إلى الاتجاه المعاكس وذلك من أجل استعادة القياس الأصلي [الإجابة: عوامل التحويل هي مقلوب بعضها لبعض].

2. سيتعرف الطلاب على طريقة ضرب العدد العشري بـ 10 (بمعنى آخر، إضافة صفر)، ولكن سيكون لدى بعض الطلاب فقط فهما كافيا حول كيفية عمل هذا. لاحظ أنه في نمط HEX، فإن 16 سيجري تمثيله في 10. [الإجابات: إن الضرب بأساس النظام العددي يعادل نفس تأثير "إضافة صفر" وذلك بغض النظر عن الأساس وذلك مع تحرك كل خانة خانة واحدة خلال العملية].

3. في هذا النشاط، يمكن للطلاب رؤية العلاقة المثيرة للاهتمام بين الأعداد ضمن أساسات مختلفة والتي هي قوى لبعضها البعض، حيث سيجدون أن الحالة الست عشرية تتضمن كتلا من أربع خانات، بينما في الحالة الثمانية فهي تتضمن كتلا من ثلاث خانات. شجع أولئك الذين أكملوا النشاط على النظر تجاه الأرقام إلى أساس 4 والتي لا تتعامل معها الآلة الحاسبة بشكل مباشر.

4. لا يملك حاصل ضرب عدد مركب بمرافقه أي مكون تخيلي، وهو الأمر الذي يعتبر مناسبا من أجل إنطاق القسمة (وذلك كما هو مبين في الصفحة السابعة من الوحدة نفسها). [الإجابة: حاصل ضرب عدد بمرافقه هو مربع القيمة المطلقة للعدد].

5. من أجل هذا النشاط، يجب نصح الطلاب برسم بعض رسوم آرغند والتحقق من نتائج حاصل ضرب أعداد مركبة بـ i. سيساعدهم هذا على رؤية أن الضرب بـ i يملك تأثير تغيير الأجزاء الحقيقية من الأعداد إلى أجزاء مركبة ومن تغيير الأجزاء التخيلية إلى أجزاء حقيقية. في الواقع، يعني هذا تحويل المحور x الموجب إلى المحور y الموجب والمحور y الموجب إلى المحور x السالب، أو الدوران بمقدار 90 درجة بعكس اتجاه عقارب الساعة.

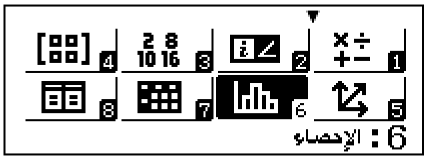
6. تحقق من أن الطلاب يعلمون كيفية استخدام نمط المعادلة /الدالة والموضح في الوحدة 4. [الإجابات: الجذور الثلاثة المكعبة لـ 8- هي 2-، $1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}$، و$1 - \sqrt{3}\boldsymbol{i}$. وتعتبر الجذور الثلاثة متباعدة عن بعضها البعض بشكل متساوي وذلك ضمن الرسم البياني لآرغند وكلها تملك نفس القيمة المطلقة (وهي 2) وبالتالي تقع على دائرة. وينطبق هذا الأمر على أعداد أخرى ونتائج مشابهة من أجل جذور أخرى].

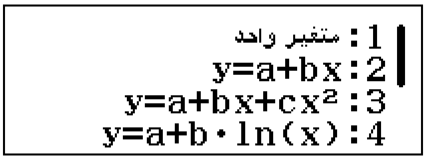
الوحدة العاشرة
الإحصاء أحادي المتغير

يتطلب تحليل البيانات الإحصائية بالشكل المناسب الحصول على الدعم التقني حيث تقدم الآلة الحاسبة ClassWiz دعما جيدا للإحصاء أحادي المتغير. في هذه الوحدة والوحدة التالية، سنستخدم نمط الإحصاء مع التركيز على الإحصاء أحادي المتغير هنا والإحصاء ثنائي المتغير (bivariate) في الوحدة 11.

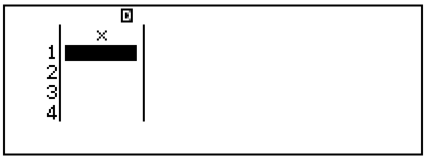
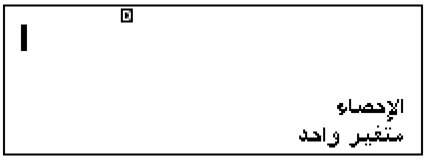
مقدمة عن الإحصاء

يتضمن الإحصاء أحادي المتغير بيانات متغير واحد فقط. ابدأ بالدخول إلى نمط الإحصاء عبر الضغط على MENU 6 ومن ثم اختر الإحصاء أحادي المتغير عبر الضغط على رقم 1 (متغير واحد). تتضمن الخيارات الأخرى بيانات ثنائية المتغير (متغيرين) والتي سوف يتم التطرق إليها في الوحدة المقبلة.





قد تملك البيانات أحادية المتغير في بعض الأحيان تكراراً، بحيث تكرر كل قيمة من قيم البيانات بضع مرات. سيجري التحدث عن هذا الأمر لاحقا في هذه الوحدة؛ أما الآن فسوف نفترض عدم وجود تكرار. من أجل إغلاق معلومات التكرار، استخدم شاشة الإعدادات SET UP، وادخل إلى الشاشة الثانية منها باستخدام ▼ ثم اضغط على 3 (خيار الإحصاء).

اختر 2 (إيقاف) لإيقاف هذه الميزة وسوف ترى بعد ذلك جدول بيانات فارغ لكي تدخل البيانات فيه كما هو مبين في الشاشة أعلاه. لاحظ أن النقر على مفتاح AC سيخبرك بأن الآلة الحاسبة موضوعة الآن للتعامل مع الإحصاء أحادي المتغير.

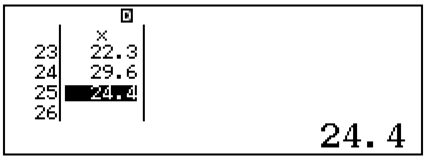
الإدخال والتحرير والتحقق من النتائج

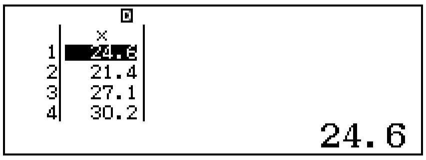
ستسمح لك الآلة الحاسبة بإدخال ما يصل إلى 160 نقطة بيانية من أجل متغير أحادي، أو ما يصل إلى 80 نقطة بيانية في حال كانت كل نقطة تملك تكرارا. في حال كان لديك أكثر من 160 نقطة بيانية، ستحتاج إلى استخدام التكرار (كما سيجري شرحه لاحقا في هذه الوحدة).

لتوضيح استخدام الآلة الحاسبة في تحليل البيانات أحادية المتغير، قم بالنظر للبيانات الموجودة في الأسفل، والتي جرى الحصول عليها من تجربة زراعة نبات الفول، حيث تم فيها قياس ارتفاع سيقان نبات الفول (بالسنتيمتر)، بعد ستة أسابيع من زراعتها حيث كانت النتائج كما هو مبين أدناه:

24.6 21.4 27.1 30.2 20.4 20.7 21.8 29.1 22.5 21.6 31.8 21.0 17.1 27.7 28.1 24.9
24.7 24.0 23.6 19.1 20.8 24.8 22.3 29.6 24.4

إذا لم يكن جدول البيانات ظاهرا على الشاشة، أوجده عبر النقر على OPTN 3 (البيانات). ادخل هذه القياسات إلى الآلة الحاسبة في العمود x مع النقر على مفتاح = بعد كل عملية إدخال. لاحظ أنه بعد قيامك بالنقر على =، يتحرك المؤشر نزولا إلى الصف التالي من الجدول.



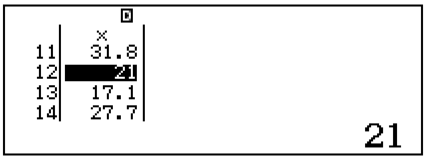


من الممكن حدوث أخطاء في الكتابة، بالتالي من الحكمة التحقق من الإدخالات.

إذا حدث خطأ في إدخالك لقيمة قبل النقر على مفتاح =، يمكنك تصحيح ذلك باستخدام مفتاح DEL. قم بإدخال القيمة الصحيحة ثم اضغط =. إذا لاحظت خطأ في نقطة بيانية جرى إدخالها سابقا، استخدم المؤشر لتظليل النقطة الغير صحيحة، ثم عدلها بالقيمة الصحيحة.

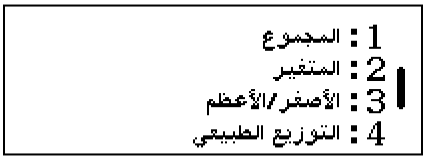
ومع إدخال البيانات، يمكنك التنقل إلى أعلى وأسفل باستخدام ▲ و ▼ حيث يمكنك التنقل في الاتجاهين، علاوة على قيامك بالتنقل من آخر قيمة في الأسفل إلى أول قيمة في الأعلى وبالعكس (كما لو كانت البيانات في حلقة). أثناء عملية التنقل، سترى أن القيم المظللة معروضة بمزيد من التفصيل والحجم في الأسفل مقارنة مما هي عليه في الجدول وذلك مع نمط الجدول في الآلة الحاسبة.

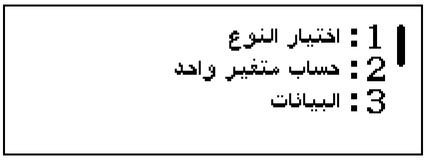
لاحظ أيضا أن الآلة الحاسبة أدخلت رقم 21 بدلا من 21.0 و24 بدلا من 24.0 على التوالي وذلك على الرغم من كتابة تلك القيم مع فاصلة عشرية .



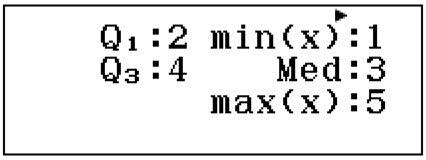
حالما يجري إدخال جميع البيانات، تتضمن عملية التحقق السهلة معرفة عدد المدخلات. في هذه الحالة، كانت النقاط البيانية المدخلة 25 نقطة وهو يتطابق مع عدد المدخلات الموجودة في الأعلى.

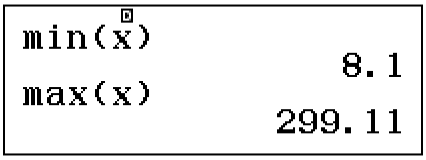
إذا تم إدخال الرقم الصحيح من نقاط البيانات، اضغط على AC لمغادرة تحرير البيانات ومن ثم OPTN لرؤية الخيارات الإحصائية والمعروضة في الشاشتين القادمتين.



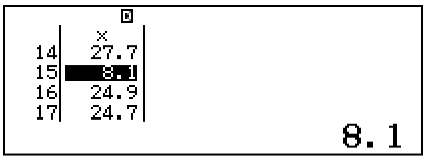


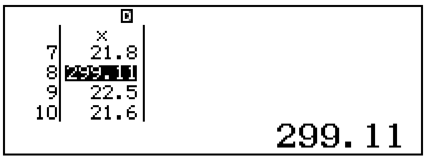
تعتبر فكرة التحقق من المدخلات العظمى و الصغرى فكرة جيدة على اعتبار أنها يمكن أن تؤدي لكشف أي أخطاء في الإدخال. من أجل الدخول إلى هذه من قائمة OPTN الموضحة في الأعلى، انقر على الخيار 3 (الأصغر/الأعظم) وحدد إما القيمة الصغرى أو العظمى. في هذه الحالة، يظهر كلا القيمتين أدناه:



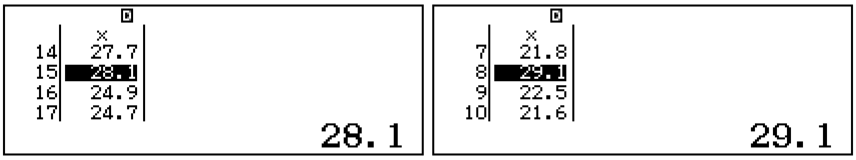


لقد أدخلنا كلا من هاتين القيمتين بشكل غير صحيح، وذلك كما يمكنك أن ترى عبر إلقاء نظرة سريعة على البيانات الأصلية، حيث تتألف كل القيم من خانتين مع فاصلة خانة عشرية واحدة. في هذه الحالة، جرى ارتكاب أخطاء طباعية (بالرغم من عدم احتمالية ارتكابك للأخطاء ذاتها في آلتك الحاسبة).





لتصحيح أي أخطاء، اضغط OPTN 3 للعودة لقائمة البيانات. في مثالنا، يشير التنقل السريع إلى أن القياس الثامن الخاص بـ 29.1 قد جرى إدخاله بشكل غير صحيح، والقياس الخامس عشر وهو 28.1 قد جرى إدخاله هو الآخر بشكل غير صحيح. ويمكن الآن تصحيح كلتا النقطتين عبر طريق إدخال القيم الصحيحة مكان تلك الخاطئة:



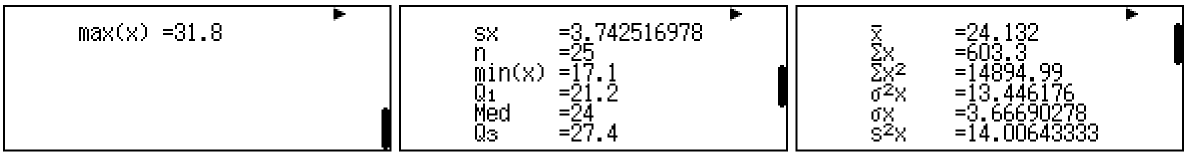
من الحكمة دائما التأكد من دقة البيانات قبل القيام بأي تحليل إحصائي.

عندما تظهر قائمة البيانات، انقر OPTN 2 (تعديل) من أجل إضافة بيانات أخرى عند الحاجة.

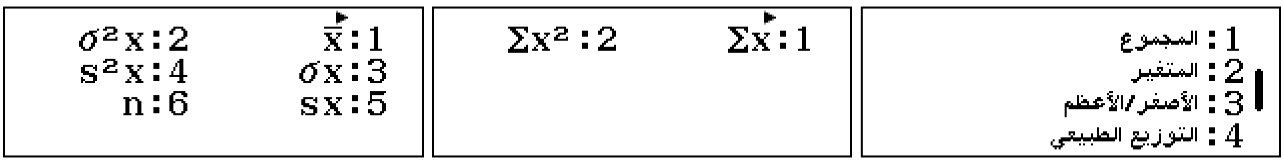
حالما يتم إدخال البيانات، يمكنك تعديلها باستخدام الأمر OPTN 3. تأكد من عدم تركك لنمط الإحصاء (حتى لو قمت بالدخول إليه من جديد عبر ضغط MENU 6). في حال خرجت من ذلك النمط، سيجري حذف بياناتك حيث تتوقع هنا الآلة الحاسبة مجموعة جديدة من البيانات.

استرداد الإحصائيات

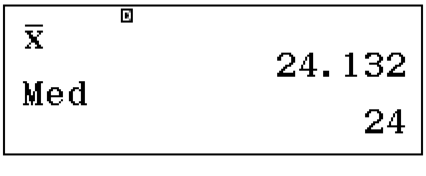
حالما تكون متأكدا من قيامك بإدخال بياناتك بشكل صحيح، يمكنك الحصول على الإحصائيات المناسبة عبر قائمة OPTN. انقر على AC لمغادرة جدول البيانات ثم انقر OPTN 2 لعرض كل الحسابات المتعلقة بالمتغير؛ ستحتاج إلى ثلاث شاشات متعاقبة لعرضها كلها وذلك كما هو مبين أدناه. (لاحظ رمز المؤشر في القمة الذي يشير إلى أنك قادر على العودة للقائمة السابقة – عند الرغبة – في حال ضغطك على ▶)



كما رأيت سابقا مع قائمة الأصغر/الأعظم، يمكنك الحصول على هذه الإحصائيات بشكل فردي من خلال الشاشة الثانية من قائمة OPTN. جرى استخدام قائمة الأصغر/الأعظم للتحقق من البيانات التي جرى إدخالها في وقت مبكر بينما تعرض الشاشات أدناه قائمتي المجموع والمتغير.



على سبيل المثال، يجري تمثيل متوسط البيانات بالمعادلة $\bar{x} = \frac{\sum X}{n}$ وهي متوفرة في قائمة المتغير عبر النقر على 1 ومن ثم =. في هذه الحالة، يمثل المتوسط 24.132 متوسط أطوال سيقان نبات الفول. أما وسيط البيانات فهو القيمة الوسطى، والتي يمكن الحصول عليها فرديا عبر قائمة الأصغر/الأعظم في الأسفل. في هذه الحالة، كلا القياسين قريبان من بعضهما البعض.



بينما يصف كل من المتوسط والوسيط موضع البيانات، انتشار البيانات هو أيضا عامل مهم. ومن القياسات الخاصة بالانتشار هو المدى، والذي هو الفرق بين القيمتين الدنيا والقصوى. والآن وبعدما جرى التحقق من

البيانات، فإن البيانات صحيحة لكل من القيمة الصغرى والعظمى 17.1 و 31.8 معروضة في الأسفل إضافة إلى عرضها في الإحصائيات الشاملة السابقة.

في هذه الحالة، يمكنك أن تحسب عقليا المدى 14.7 من هذين العددين وذلك بالرغم من أنه من الممكن أيضا القيام بذلك على الآلة الحاسبة بشكل مباشر وذلك باستخدام القيم الفردية من قائمة الأصغر/الأعظم كما هو موضح في الأسفل. وبشكل مشابه، يمكن الحصول على نصف المدى الربعي الخاص بـ 3.1 من القيم الربعية العليا والسفلى وذلك باستخدام القيم الفردية:

```
(Q3-Q1)÷2
                3.1
```

```
max(x)-min(x)
               14.7
```

```
min(x)
               17.1
max(x)
               31.8
```

إن هذا المدى هو مؤشر بسيط جدا لمعرفة انتشار البيانات لأنه يستخدم فقط قيمتين. أما الانحراف المعياري للتعداد، والممثل بالرمز σ_x ، فيقيس أيضا انتشار البيانات:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n}}{n}}$$

ويعتمد الانحراف المعياري على كافة البيانات، ليس فقط القيمتين العليا والدنيا. في هذه الحالة، إذا كان لدينا تعداد كل الفول، سيكون الانحراف المعياري تقريبا 3.67 سم، كما هو مبين أدناه. يمكن الحصول على التباين هو حوالي 13.45 عبر النقر على مفتاح $\boxed{x^2}$ بعد الحصول على الانحراف المعياري، أو يمكن الحصول عليه مباشرة من قائمة المتغير:

```
σx
         3.66690278
σ²x
          13.446176
```

لا نملك في الكثير من الأحيان إمكانية الوصول إلى كامل التعداد، ولكن قد يكون لدينا بضع عينات عشوائية للتعداد. في هذه الحالة، تعتبر وسيلة القياس الأكثر ملاءمة من الانحراف المعياري هي ما تدعى باسم التقدير الغير متحيز لتعداد الانحراف المعياري والممثلة بالرمز s_x:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n}}{n-1}}$$

بشكل عام، وكما ترى من دراسة الصيغتين، فإن s_x أكبر قليلا من σ_x، وذلك لأن البسط مقسوم على مقام أصغر. أما الانحراف المعياري لعينة s_x فهو مناسب للاستخدام إذا اعتبرنا ما لدينا من نبات الفول عينة من تعداد عام. في هذه الحالة تعتبر الـ 25 نبتة فول ممتلكة لعينة انحراف معياري قياسي هي 3.74 وتباين العينة هو 14.01.

```
sx
        3.742516978
s²x
        14.00643333
```

إضافة إلى هذه الإحصائيات، يكون من المفيد أحيانا الحصول على مجموع النتائج الأصلية ومجموع مربعاتها وهي القيم المستخدمة داخليا من قبل الآلة الحاسبة للقيام بالعمليات من أجل الانحراف المعياري. وهذه العمليات معروضة في قائمة المجموع:

Σx²:2 Σx:1	Σx 603.3 Σx² 14894.99

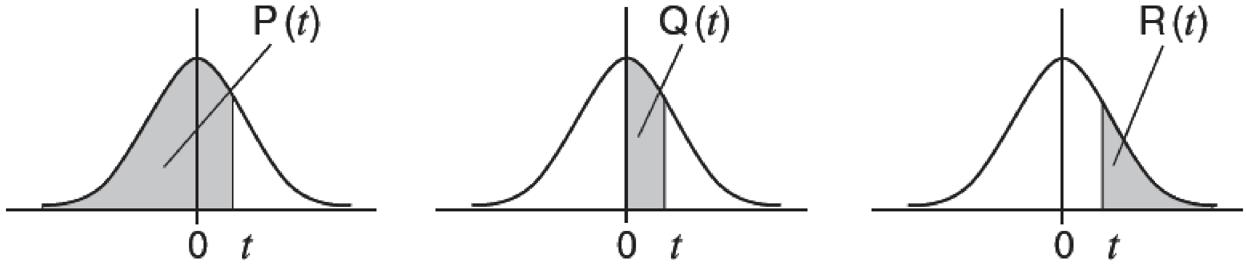
وتشير الإحصاءات المقدمة من قبل الآلة الحاسبة لأجل هذه البيانات إلى أن ارتفاعات الفول تنتشر بشكل متناظر تقريبا وأن معظم الارتفاعات قريبة من المتوسط مع 2 انحراف معياري (يكون الرسم البياني للبيانات مفيدا في المساعدة على التفسير والتوزيع).

تحديد الاحتمالات الطبيعية

(تصف الوحدة 12 التوزيع الاحتمالي الطبيعي ببعض التفصيل. قد ترغب في تخطي هذا القسم حتى إكمالك الوحدة 12).

تسمح لك الآلة الحاسبة باستخدام التوزيع الاحتمالي الطبيعي مع البيانات التي تم إدخالها من أجل الفول على افتراض أن لدينا كامل تعداد الفول. وتوزع الارتفاعات يملك متوسط $\mu = 24.132$ وانحراف معياري هو $\sigma_x \approx 3.667$.

من أجل استخدام التوزيع الاحتمالي الطبيعي لأطوال الفول، على افتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي، يتطلب التحول إلى التوزيع بمتوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 1$. حالما يجري تحويل أطوال الفول، سيجري تحديد $Q(t)$، $P(t)$، $R(t)$ المترافقة مع الأطوال عن طريق الآلة الحاسبة كما هو موضح في الصفحة التالية.



لتحويل طول نبات الفول X إلى متغير معياري طبيعي (ممثلا في الآلة الحاسبة وفي المخططات البيانية في الأعلى بـ t)، تقوم الآلة الحاسبة باستخدام التحويل التالي:

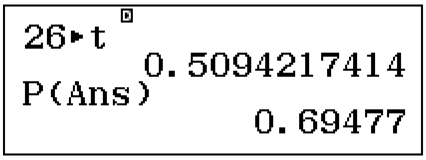
$$t = \frac{X-\mu}{\sigma_x}$$

في هذه الحالة الخاصة، يكون التحويل المستخدم هو $t = \dfrac{X-24.132}{3.66690278}$ ويعتبر من الشائع في الكتب استخدام الرمز z بدلا من الرمز t.

لحسن الحظ، يمكن للآلة الحاسبة القيام بهذا التحويل تلقائيا عبر أوامر التوزيع الطبيعي والتي يجري الحصول عليها عبر النقر على $\boxed{4}$ خيار (التوزيع الطبيعي) في قائمة OPTN:

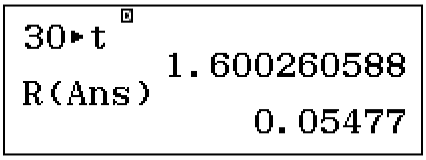
Q(:2 P(:1 ▸t:4 R(:3	1: المجموع 2: المتغير 3: الأصغر/الأعظم 4: التوزيع الطبيعي

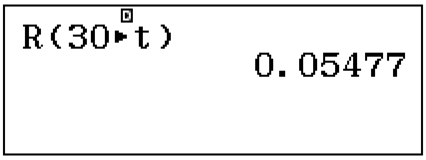
يتم تنفيذ التحويل المناسب عبر القيام أولا بإدخال قيمة X ثم النقر على 4 في قائمة التوزيع الطبيعي. على سبيل المثال، تعرض الشاشة أدناه كيفية العثور على القيمة t المترافقة مع طول نبات الفول X = 26:



للعثور على نسبة الأطوال المتوقع أن تصل إلى 26 سم، نحتاج لإيجاد P(0.5094217414). إلا أنه في الوقت نفسه، من الأسهل استخدام ميزة Ans في الآلة الحاسبة في هذه الحالة على اعتبار أن قيمة t كانت معروضة للتو على الشاشة. وتعرض الشاشة في الأعلى أن ما نسبته 69% من أطوال نبات الفول في هذه العينة من المتوقع لها أن تكون مساوية أو أقل من 26 سم. (في الواقع، النتيجة هي 18 من 25 ساق – أي أن 72% من هذه العينة المحددة أقل أو تساوي 26 سم).

يمكن الإجابة على أسئلة أخرى بشكل مشابه. على سبيل المثال، من أجل العثور على احتمالية عينة عشوائية من الفول أطول من 30 سم ، قم في البداية بإيجاد قيمة t المرتبطة بـ 30 سم، ومن ثم استخدمها من أجل إيجاد الاحتمالية المناسبة R(t):





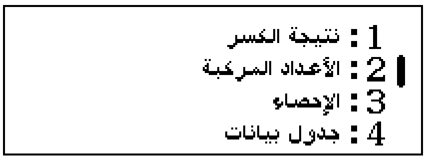
يظهر على الشاشة الثانية أعلاه أنه من الممكن تحديد احتمالات مثل هذه مع استخدام أمر واحد، عند الرغبة، وذلك بالرغم من أنها ليست فكرة جيدة في حال أردت حفظ قيمة t. في هذه الحالة، فإن الاحتمالية التي تم الحصول عليها تتمثل في أن حوالي 5% من نبات الفول من المتوقع أن يكون أطول من 30 سم. (في الواقع، 2 من نبات الفول الـ25 تتجاوز 30 سم – أي ما يعادل 8% من تلك العينة المحددة).

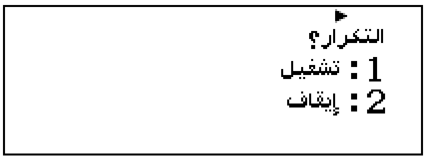
تكرار البيانات

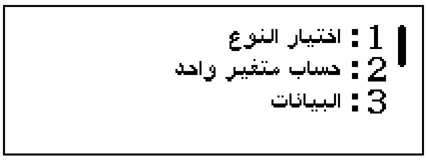
في بعض الأحيان، قد تتألف بيانات أحادية المتغير من أكثر من 160 عينة (والذي هو الحد الأقصى للآلة الحاسبة)، بالتالي يجب القيام بعملية تجميع البيانات ضمن مجموعات. هناك بعض البيانات أحادية المتغير يجري جمعها بشكل متكرر؛ بالتالي من الأفضل التعامل معها في الآلة الحاسبة باستخدام التكرار.

عندما يجري استخدام التكرار، سيكون الحد الأقصى هو 80 نقطة بيانية (كل نقطة منها مرتبطة مع تكرار). يعني هذا أن آلتك الحاسبة قادرة على التعامل مع مجموعات رقمية كبيرة العدد شريطة أن يجري تنظيمها في حدود 80 قيمة منفصلة فقط.

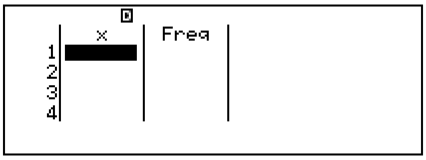
لتفعيل التكرار، اذهب للصفحة الثانية من قائمة الإعدادات SET UP وذلك كما هو مبين أدناه واختر الرقم 3 من أجل الوصول لوضع الإحصاء، ثم انقر على 1 من أجل تشغيل ميزة التكرار. بعد ذلك، استخدم المفتاح OPTN من أجل اختيار الإحصائيات أحادية المتغير من جديد وهو أمر ضروري القيام به بعد عملية تغيير عدد أعمدة البيانات. *لاحظ أن هذا التغيير سوف يمحو أي بيانات كانت موجودة بالفعل في جدول البيانات.*







عندما تحاول الوصول للبيانات باستخدام قائمة الإحصاء، سترى كيف جرى إزالة البيانات وكيف بات لديك الآن عمودان، واحد من أجل البيانات والثاني من أجل التكرار المترافق:



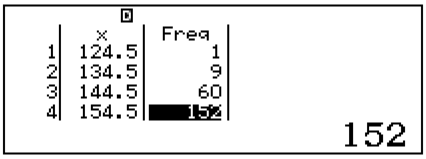
ولرؤية كيفية تعامل الآلة الحاسبة مع تكرار البيانات، قم بالنظر للجدول التالي الذي يعرض البيانات الخاصة بأطوال مجموعة مؤلفة من 455 فتاة في مدرسة، حيث فيه مسجل طول كل فتاة مقربا لأقرب سينتمتر. ومع وجود أكثر من 160 فتاة، وأكثر من 80 طول مختلف، يغدو من الضروري تجميع هذه البيانات للتمكن من تحليلها. وقد جرى تسجيل البيانات في المجالات الموضحة في الأسفل.

هناك طبعا طرق أخرى في تجميع البيانات، ولكن ست إلى عشر فترات عادة ما تستخدم.

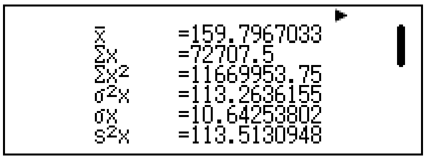
من أجل إدخال البيانات في الحاسبة، يتم تمثيل كل مجال بنقطة المنتصف وذلك كقيمة منفصلة من أجل متغير الطول X. بعد إدخال كل قيمة، يجري النقر على مفتاح ⊜ ويتحرك المؤشر بدوره لأسفل العمود المعني. لهذا السبب، من الأسهل إدخال البيانات في أعمدة (جميع نقاط المنتصف أولا ثم باقي التكرار)، ولكن تأكد من أن قيم X و التكرار متطابقة

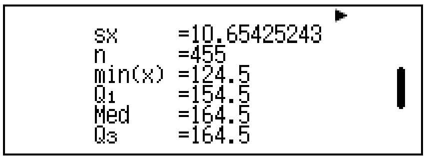
الطول (سم)	النقطة المتوسطة	التكرار
120 - 129	124.5	1
130 - 139	134.5	9
140 - 149	144.5	60
150 - 159	154.5	152
160 - 169	164.5	161
170 - 179	174.5	57
180 - 189	184.5	13
190 - 199	194.5	2

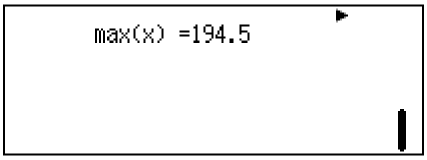
يكمن التحقق الجيد لمدخلات البيانات في أن التكرار والبيانات بمحاذاة بعضها البعض:



حالما يتم إدخال كافة البيانات، اضغط AC بحيث يجري استعادة الإحصائيات بنفس الطريقة السابقة باستخدام الزر OPTN (في الحالة السابقة من دون تكرار). وتعرض الشاشات في الأسفل القيم أدناه.

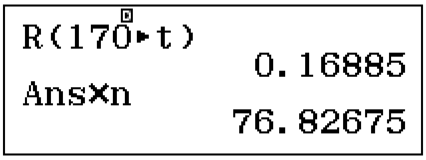






في هذه الحالة، لاحظ أن العدد الإجمالي لنقاط البيانات هو $n = 455$، وذلك بالرغم من أنه قد جرى إدخال ثمان قيم فقط، وهذا يؤكد من أن الترددات قد جرى إدخالها بشكل صحيح.

يمكن أيضا استخدام المتوسط أو الانحراف المعياري بشكل تلقائي من قبل الآلة الحاسبة وذلك من أجل معاينة التوزيعات الاحتمالية الطبيعية. على سبيل المثال، تقترح الشاشات الموجودة في الأسفل بأنه (على افتراض أن الأطوال تتبع التوزيع الطبيعي)، فإن حوالي 17% أو 77 فتاة سيكن أطول من 170 سم.

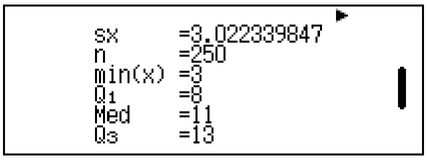


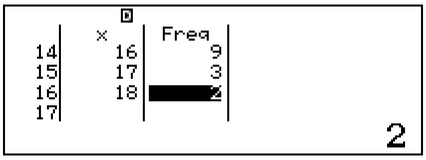
في الواقع، يعرض جدول البيانات وجود فقط 72 فتاة في المجموعة بطول أكبر من 170 (وهو أقل مما توقعته الحاسبة). ومع ذلك، لا بد من الحذر وعدم توقع الدقة المفرطة في حالات مثل هذه، حيث ستكون احتمالية أن تكون البيانات طبيعية *تقريبي*.

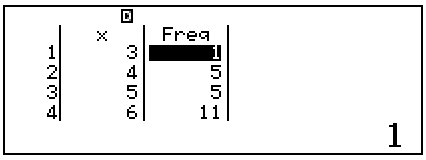
لا يكون التكرار ذات أهمية فقط في حالة تجميع البيانات ضمن مجموعات، حيث أنه في بعض الأحيان يجري استخدامها لأن البيانات قد جرى تجميعها بشكل طبيعي مع تكرار. على سبيل المثال، من أجل معاينة احتمالية نتائج قذف ثلاث قطع نرد تقليدية (ذات 6 أوجه) مع جمع ناتجها، يجب عمل تصنيف للمحاولات المدمجة هذه وتوليد مجموعة التوزيعات التالية للنتائج الخاصة بـ 250 مجموعة رمي، قام فيها 25 طالب برمي 3 قطع نرد 10 مرات.

الإجمالي	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
التكرار	1	5	5	11	15	29	21	22	39	31	28	16	13	9	3	2

يمكن إدخال هذه البيانات في الحاسبة عبر البدء بكل من MENU 6 و 1، والذي سوف يؤدي لإزالة أي بيانات سابقة. ستبقى إعدادات التكرار من دون تغيير وهكذا سوف تسمح لنا بإدخال البيانات والتكرار المرتبط معها.

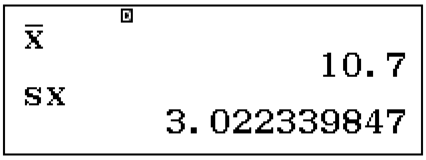






يعتبر من الأمور الجيدة التحقق من مدخلات البيانات. تكمن إحدى الطرق للقيام بذلك عبر استعادة نقاط البيانات من قائمة حساب متغير واحد، وذلك كما هو موضح في الأعلى. في هذه الحالة يكون $n = 250$

مرة أخرى، تكمن الفائدة الرئيسية هنا في المتوسط والانحراف المعياري، وكلاهما مبينان أدناه:



من الواضح أنه من الأسهل تلخيص هذه البيانات عدديا باستخدام الآلة الحاسبة بدلا من القيام بالعمليات الحسابية يدويا. حيث ستكون النتيجة للمتوسط متوقعة إلى حد ما وذلك مع معرفتنا أن متوسط قذف نرد واحد هي 3.5، بالتالي نتوقع أن تكون متوسط نتيجة رمي ثلاث قطع نرد بشكل منفصل هي ثلاث أضعاف العدد 3.5 أو حوالي 10.5.

الإحصاءات الاستدلالية

في الممارسة العملية، تعتبر مجموعات البيانات الصغيرة النسبية أمرا مألوفا في الإحصاء وذلك على اعتبار أن عملية الحصول على البيانات تكون في العادة عملية مكلفة كثيرا؛ بالتالي يحاول الناس استخدام عينات للتنبؤ بالتعداد العام بناء على العينات التي جرى أخذها منها.

هناك نتيجة مهمة جدا، وأكثر تقدما من إمكانية وصفها هنا بشكل تفصيلي، وهي أنه عندما يجري سحب عينات بحجم n عشوائيا من تعداد ذي متوسط μ وانحراف معياري σ، من المرجح أن يقترب متوسط العينات

من المتوسط الطبيعي والانحراف المعياري للتعداد الأكبر، إنما من دون أن يتطابقا. ويدعى هذا عادة باسم *الخطأ المعياري للمتوسط*، أو اختصارا *الخطأ المعياري*، والذي يجري تعريفه بالشكل:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ويمكن استخدام هذه النتيجة بعد ذلك من أجل إعطاء تقدير جيد تجاه المجالات التي يقع فيها متوسط التعداد وذلك باستخدام بعض خصائص التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

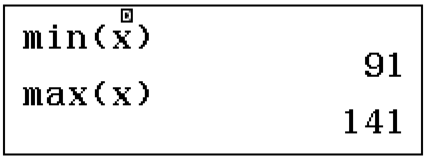
على سبيل المثال، وتقريبا في 95% من الزمن، من المعروف من التوزيع الطبيعي أن المتوسط يكون ضمن 1.96 خطأ معياري من متوسط العينة.

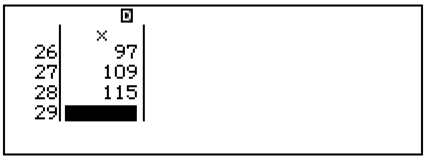
وبنفس الطريقة، ما يقرب من 90% من الوقت، من المعروف من التوزيع الطبيعي أن متوسط التعداد سيكون ضمن 1.645 خطأ معياري من المتوسط.

إليك هنا مثال على هذه الفكرة. لنفترض عالم يرغب في تحديد الكتلة النموذجية لنوع جديد من الأسماك في نهر في مكان بعيد حيث قام بالحصول على عينة عشوائية من 28 سمكة تم اصطيادها من النهر وقام بعملية وزنها. إليك الكتل التالية معطاة بالغرام:

112	94	141	102	112	91	125
114	106	121	130	113	99	119
107	127	94	100	104	116	137
105	105	111	128	97	109	115

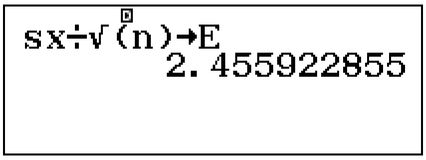
قم بإدخال هذه البيانات في الآلة الحاسبة وذلك بعد القيام أولا بإغلاق ميزة التكرار في قائمة الإعدادات SET UP.

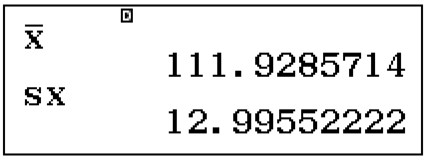




تعرض الشاشات أعلاه عملية تحقق سريعة لدقة مدخلات البيانات: جرى إدخال 28 كتلة، الأقل فيها هو 91 غرام، والوزن الأقصى هو 141 غرام. وهذا الأمر يبدو متسقا مع البيانات.

يتم الحصول على المتوسط والانحراف المعياري من قائمة OPTN، مع الأخذ بعين الاعتبار بأن الانحراف المعياري للعينة هو تقدير للانحراف المعياري لتعداد (مجهول) وبالتالي يجري استخدامه من أجل الحصول على تقدير جيد للخطأ المعياري:





يمكن الحصول على تقدير الخطأ المعياري باستخدام القيم المتوفرة في قائمة المتغير، وذلك كما هو موضح في الأعلى. ومن أجل الملاءمة، جرى تخزين هذه النتيجة في الذاكرة E، باستخدام الأمر Jk. وذلك بالرغم من إمكانية اختيارك كتابته على ورقة. ومن ثم مجال الثقة هي نقطتي النهاية في الأسفل، وتمثل متوسط العينة x (± 1.96 الخطأ المعياري:

```
x̄-1.96E
        107.1149626
x̄+1.96E
        116.7421802
```

بالتالي فإن العالم يمكن أن يكون واثقا بنسبة 95% من أن متوسط وزن التعداد الخاص بالأسماك التي حصل عليها من تلك المنطقة سيكون بين 107 و117 غراما.

كلما صغر طول مجال الثقة زاد ذلك من قلة ثقة العالم في الحصول على تنبؤ بالمتوسط. بالتالي يمكن أن يكون متأكد بنسبة 90% من الثقة بأن كتلة المتوسط للتعداد الخاص بالأسماك في المنطقة التي حصل عليها على الأسماك منها تزن بين 108 و116 غرام.

```
x̄-1.645E
        107.8885783
x̄+1.645E
        115.9685645
```

وبعبارة أخرى، وفي حوالي تسع مرات من أصل عشرة، ستولد هذه الإجراءات مجال ثقة يتضمن متوسط التعداد *الفعلي* لكتلة تلك الكائنات الجديدة من الأسماك. (بالتالي، من حوالي مرة كل عشر مرات، سيكون متوسط التعداد الفعلي خارج 90% من مجال الثقة التي تم الحصول عليه).

إذا جرى أخذ عينات أكبر، سيكون الخطأ المعياري أصغر؛ بالتالي مجال الثقة أيضا سيكون أصغر مقارنة بعينات أقل. لهذا السبب، يفضل العلماء وخبراء الإحصاء عموما أخذ عينات أكبر كلما كان ذلك ممكنا، لكي يغدو مجال الثقة أصغر، وليحصلوا بالتالي على معلومات أكثر دقة عن متوسط التعداد.

أفكار الاحصاء الاستدلالي متطورة جدا، ويجب عليك أن لا تعتمد على هذه المعالجة الوجيزة لفهمها جيدا، ولكن ينصح دراستها في أماكن أخرى أيضا.

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة

1. يقوم مزارع بتسجيل المال الذي يتلقاه كل يوم من أيام الأسبوع في دفتر المبيعات الخاص به:
$102.50, $250.00, $310.20, $150.70, $207.40, $120.90, $210.00

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط والانحراف المعياري لما تلقاه خلال ذلك الأسبوع.

2. يقوم موظف استقبال بتسجل أرقام عدد الاتصالات الهاتفية التي يتلقاها كل يوم وذلك لفترة أسبوع على النحو التالي:

اليوم	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
العدد	140	125	134	132	1260

a) أوجد المتوسط والانحراف المعياري للمكالمات التي تلقاها خلال ذلك الأسبوع.

b) بعد إكماله عملية الحساب، أدرك بأن بيانات يوم الجمعة مسجلة بطريقة خاطئة حيث الرقم الأصلي هو 126 لا 1260. قم بتعديل البيانات من أجل تصحيح هذا الخطأ ومن ثم أوجد المتوسط والانحراف المعياري من أجل البيانات الصحيحة.

3. جرى القيام بمسح عشوائي لطلاب ضمن مدرسة ثانوية محلية من الصف السابع حتى الثاني عشر من أجل معرفة كمية المال التي يجلبونها للمدرسة معهم. وقد جرى الحصول على المعلومات التالية (بالدولار):

5.20, 6.15, 0.40, 10.55, 2.56, 5.12, 16.40, 25.30, 16.20, 1.45, 6.35, 10.10, 15.20, 18.75, 2.30, 0.80, 1.20, 6.90, 8.50, 2.30

a) ادخل هذه البيانات ضمن الآلة الحاسبة واسترجع جميع الإحصائيات من قائمة OPTN؛ أوجد المتوسط والوسيط والانحراف المعياري (غير المتحيز) والربعي الأدنى والمدى.

b) مع افتراض بأن البيانات موزعة بشكل طبيعي، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة t المرتبطة مع كمية مال قدرها $6.00.

c) مع الافتراض بأن البيانات موزعة بشكل طبيعي، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد احتمالية أن تجلب عينة عشوائية من الطلاب ما قيمته $6 او اقل إلى المدرسة معهم.

4. إذا أمكن الافتراض بأن توزيع كميات المال التي يحملها الطلاب هي توزيع طبيعي مع $\mu = 8$ و σ = 7، كم عدد الطلاب من اصل 20 تتوقع أن يحملوا مبلغا أقل من $3.00؟

5. عدد الحيوانات الأليفة التي يملكها 70 طالب في الصف العاشر هي كالتالي

عدد الحيوانات الأليفة	0	1	2	3	4	5	6	7	8
عدد الطلاب	12	25	12	10	6	2	1	0	2

استخدم التكرار في الآلة الحاسبة لإيجاد العدد المتوسط للحيوانات لكل طالب.

6. يقوم فنان برسم ثلاث لوحات كل شهر لمدة عام.

a) من دون استخدام التكرار، استخدم الآلة الحاسبة لمعرفة المتوسط والانحراف المعياري لعدد اللوحات التي يرسمها شهريا.

b) كرر العمليات الحسابية من أجل a) إنما هذه المرة مع استخدام التكرار.

c) من دون استخدام الآلة الحاسبة، حدد كلا من Σx و Σx^2 لهذه البيانات. ومن ثم تحقق من أن النتائج على الآلة الحاسبة هي نفسها نتائجك.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. لدينا مجموعتين من طلاب الصف الثامن حصلوا على نفس الاختبار في نفس الوقت. إليك نتائج المجموعتين:

مجموعة أ: 5, 5, 5, 7, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 7
مجموعة ب:10 ,10 ,10 4 ,3 ,8 ,10 ,10 ,3 ,4 ,1 ,9 ,0

a) أوجد المتوسطات والانحرافات المعيارية(s_x) لهاتين المجموعتين. علق على أي تشابهات أو اختلافات لاحظتها.

b) أوجد مجموعة أخرى من النتائج مع متوسط هو 6 وقيم مختلفة عن هذه.

2. لدينا صفان مؤلفان من 30 طالب يقومان بإجراء تجربة تتضمن رمي نرد وتسجيل النتائج كصف. حيث يقوم كل طالب برمي زهر واحد عشر مرات والحصول على النتائج التالية:

الرقم على النرد	1	2	3	4	5	6
التكرار	47	55	45	54	55	44

وقامت مجموعة ثانية من 30 طالبا بإجراء نفس التجربة مع النتائج التالية:

الرقم على النرد	1	2	3	4	5	6
التكرار	54	45	48	56	48	49

a) أوجد المتوسط والانحراف المعياري(s_x) لنتائج كل صف.

b) في أزواج أو مجموعات، قوموا برمي الزهر 300 مرة وسجلوا النتائج. قوموا بمقارنة المتوسط والانحراف المعياري بين المجموعتين.

c) قم بالتحقق من الآثار على نتائج الإحصائيات في حال تم ضم كلا المجموعتين في مجموعة واحدة مع تكرار هو 600.

3. لدى بائع لمعدات منزلية مجموعة من الموظفين برواتب سنوية مختلفة: المدير العام (\$100,000)، موظفي مبيعات (\$60,000)، مساعد شخصي (\$50,000)، عاملين (\$40,000)، مدير مخزن (\$40,000)، سائق توصيل (\$35,000)، وموظف استقبال (\$30,000). أوجد المتوسط والوسيط والنمط (يعني الأكثر تكررا) لهذه الرواتب السنوية. إذا قام المدير العام بالحصول على جائزة لأدائه مقدارها \$100,000 وحصل على راتب جديد هو \$200,000، احسب الإحصائيات الجديدة. ما الذي تلاحظه؟

4. يتوزع وزن حيوان القنفذ عادة بين μ = 45 غرام و σ = 1.8 غرام.

a) إذا اخترت قنفذ عشوائي، ما هو احتمال أن يزن أقل من 43 غرام؟

b) استخدم آلتك الحاسبة للحصول على تقدير أقل وزن لنسبة 5% من كائنات القنفذ.

5. استخدم الآلة الحاسبة لاستكشاف آثار تحويل القيم حيث قم بإدخال بيانات مجموعة صغيرة مثل {2، 3، 5، 7، 8} على آلة حاسبة وسجل المتوسط والانحراف المعياري على الورق.

a) أضف 3 إلى كل نقطة بيانية واعثر على المتوسط والانحراف المعياري مرة أخرى. قارن ذلك مع الإحصاءات الأصلية.

b) اضرب كل نقطة بيانية بـ 4 واعثر على المتوسط والانحراف المعياري مرة أخرى. قارن ذلك مع الإحصاءات الأصلية.

6. أختبر مع الآلة الحاسبة بناء مجموعة من البيانات مكونة من عشرة عناصر فيها المتوسط هو 50 والانحراف المعياري هو 10.

ملاحظات من أجل المعلمين

تسلط هذه الوحدة الضوء على نمط الإحصاء في الآلة الحاسبة وكيف يمكنه مساعدة الطلاب على التفكير بتحليل البيانات أحادية المتغير. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف البيانات بطرق مختلفة. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

الإجابات على التمارين

1. $\bar{x} = 193.1$ ، $\sigma = 68.31$ ، $s = 73.78$ 2. a) 358.2، 504.15   b) استخدم [SHIFT] [1] [2] من أجل تعديل البيانات 131.4، 6.15.   3. a) $\bar{x} = 8.09$ الوسيط = 6.25 $s = 7.00$ ، $Q_1 = 2.3$، المدى = 25.3 – 0.4 = 24.9   b) استخدام قائمة التوزيع الطبيعي من أجل الحصول على $t = -0.31$ من أجل $x = 6$ c) ومن ثم $P(Ans) = 0.38$ 4. 23.75% أو حوالي5   5. 1.93   6) a. 3، 0   b) نفس النتيجة: 3، 0   c) $\Sigma x = 12 \times 3 = 36$، $\Sigma x^2 = 12 \times 9 = 108$.

النشاطات

1. يوضح هذا النشاط كيف يصف الانحراف المعياري التغير وذلك على اعتبار أن لكلا المجموعتين متوسط هو 6، ولكن متغيرات المجموعة الأولى أقل من الثانية. ومن أجل القيام بمجموعة ثانية مع متوسط 6، شجع الطلاب على تعديل المجموعة الحالية باستخدام قائمة الإحصائيات بزر [SHIFT] [1] [2] ولاحظ كيف أن المتوسط لا يتأثر وأن Σx يبقى نفسه. [الإجابات $\bar{x}$ = 6، s_A = 1.35، s_B = 3.86].

2. سيساعد هذا على إظهار كيف أن البيانات العشوائية ليست دائما متشابه، وأنه من المفيد جمع بيانات حقيقية إضافة إلى استخدام بيانات ثانوية. مع وجود بيانات كافية، فإن النتائج تكون متسقة تماما، وإن لم تكن متطابقة. ومن المفيد القول بأن الجمع بين بيانات المجموعتين لا تؤثر على متوسط أو تباين نواتج النرد. [الإجابات: (a) 3.49، 1.68 و3.49، 1.71 (c) مجموعين 3.49، 1.69]

3. النقطة الرئيسية لهذا النشاط هي فحص آثار القيم المتطرفة على الإحصاءات. من المفترض أن يعرف الطلاب بالفعل كيفية إيجاد النمط والمتوسط يدويا (وكلاهما لا تعالجه الآلة الحاسبة)، ولكنهم سيرون الآثار الكبيرة للقيم المتطرفة على المتوسط (فقط) وذلك عن طريق تجربة رواتب أخرى ممكنة للمدير العام، وتعديل مجموعة البيانات. قد تريد استبدال عملة الدولار بعملة ورواتب محليين.

[الإجابات: يبقى الوسيط والنمط على حالهما 40,000$، ولكن المتوسط يرتفع من 50,556$ إلى 61,667$].

4. يشمل هذا النشاط استخدام جداول احتمال طبيعية مع إحصاءات موجزة بدلا من البيانات. ليس من الضروري استخدام الأوامر من أجل إدخال البيانات وذلك كما سنناقش في الوحدة 12. بالنسبة للجزء الثاني من النشاط، شجع الطلاب على استخدام التجربة والتعديل من أجل الحصول على إجابة تقريبية. شجع الطلاب على استخدام ميزة الإعادة مع ◄ للقيام بذلك بكفاءة. لمزيد من الكفاءة، ولدى الآلة الحاسبة القدرة على قلب الاحتمالية الطبيعية والتي سيجري استكشافها في وحدة الاحتمالات. [الإجابات: (a) P ((43-45) ÷ 1.8) ≈ 0.13 (b) حوالي 42.0 غرام].

5. يمكن للطلاب استكشاف التحويلات للبيانات مباشرة لمعرفة آثارها على الإحصاءات. شجع الطلاب على تجربة ذلك مع عمليات أخرى لفهم آثارها، بما في ذلك استخدام أزواج من العمليات، مثل طرح 2 ثم ضرب بـ 5. وهذا يساعدهم على رؤية أهمية التحويل الطبيعي المهم $z = (X - \mu)/\sigma$، والتي يجري تمثيلها في الآلة الحاسبة على أنها t. [الإجابات: الأصل $\bar{x}$ =5، $s \approx 2.55$ (a $\bar{x}$ =5+3=8، s لم تتغير (b $\bar{x}$ =5x4=20، $s \approx 10.20$ (s مضروبة بـ 4)].

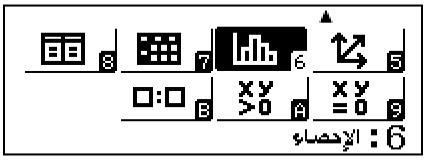
6. هناك العديد من المجموعات البيانية الممكنة التي تلبي المتطلبات، على الأقل تقريبا. يهدف هذا النشاط لإتاحة الفرصة أمام الطلاب لتجربة التعلم البديهي عن طريق اختبار كيف تؤثر قيم البيانات على الإحصاءات. ستُنتج مجموعة متناسقة من عشر قيم حوالي 50 في متوسط 50، في حين التباعد بين القيم سينتج مختلف الانحرافات المعيارية. [الجواب: مثال واحد ممكن هو مجموعة {35،39،42،45،48،52،55،58،61،65} مع $\bar{x}$ =50 و $s \approx 9.9$].

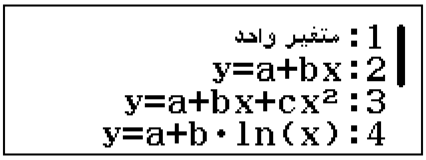
الوحدة 11
الإحصائيات ثنائية المتغيرات

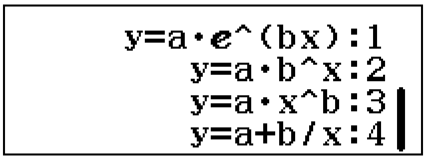
يتطلب تحليل البيانات الإحصائية دعما تقنيا للحصول على كفاءة مرضية وسوف تجد كيف أن الآلة الحاسبة *ClassWiz* تدعم الإحصائيات ثنائية المتغيرات بشكل جيد. وكما هو الحال مع الوحدة السابقة، سوف نبقى في نمط الإحصاء، ونركز على الإحصائيات ثنائية المتغيرات، العديد من العمليات الحسابية مماثلة لتلك التي جرى استخدامها في الإحصائيات أحادية المتغير.

مقدمة عن الإحصائيات ثنائية المتغيرات

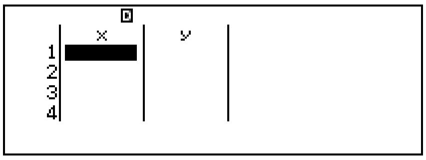
تتضمن الإحصائيات ثنائية المتغيرات بيانات مكونة من متغيرين، بالتالي فإن الاهتمام هنا يكون عادة على العلاقة بين هذين المتغيرين. تفترض الآلة الحاسبة بأن رمزي المتغيرين هما x و y. ابدأ عبر الدخول إلى نمط الإحصاء عبر النقر على MENU 6. حيث تتضمن كل الخيارات (باستثناء الخيار الأول) إحصائيات ثنائية المتغيرات. تشير الشاشة إلى وجود سبعة نماذج مختلفة لتمثيل العلاقة بين المتغيرين. في البداية، لنضغط على الخيار 2، والذي سيسمح لنا باستكشاف العلاقة *الخطية* في الصيغة $y = a + bx$.







ترتبط البيانات ذات المتغيرين في بعض الأحيان مع تكرار، وذلك على الرغم من أنه أمر نادر الحدوث، بالتالي قد يتكرر كل زوج من البيانات بضع مرات. سنفترض الآن بأن التكرارات غير مدرجة هنا. من أجل إغلاق ميزة التكرار، استخدم شاشة الإعدادات SET UP، واختر الصفة الثانية مع ▼ ثم اضغط على الرقم 3 (خيار الإحصاء).



اختر 2 (إيقاف) وسوف يعود جدول البيانات ليكون خالٍ من أجل x و y، كما هو مبين في الشاشة أعلاه.

الإدخال والتحرير والتحقق من البيانات

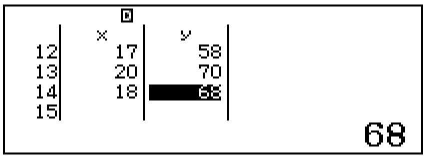
تسمح لك الآلة الحاسبة بإدخال 80 نقطة بيانية من أجل المتغيرين. إذا كان لديك أكثر من 80 زوجا بيانيا، ستحتاج إلى استخدام التكرار.

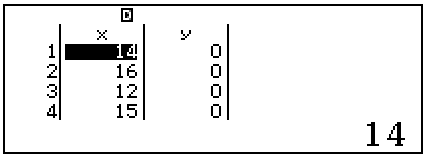
لتوضيح استخدام الآلة الحاسبة في تحليل ثنائي المتغير، انظر للبيانات أدناه. قامت ممرضات في مدرسة بالتحقق من نبضات الأطفال وأردن معرفة إن كان في الإمكان الحصول على قراءات جيدة بعد مدة 15 ثانية فقط، لكونهم يرون بأن ذلك يوفر الكثير من الوقت. بالتالي، قاموا بقياس دقات قلب 14 طفلا لمدة 15 ثانية ومن ثم قسن النبضات من جديد لمدة 60 ثانية حيث حصلن على النتائج التالية:

x (نبضات لمدة 15 ثانية)	18	20	17	24	23	22	25	14	19	13	15	12	16	14
y (نبضات لمدة 60 ثانية)	68	70	58	86	87	84	92	51	75	41	59	43	65	57

من المفيد إدخال هذه القياسات في الآلة الحاسبة في عمود x أولا، ثم النقر على = بعد كل إدخال. لاحظ

أنه بعد النقر على ⊜، يتحرك المؤشر للأسفل للصف الثاني من الجدول مع وضع 0 في عمود y كما هو موضح أدناه. بعد ذلك، انقر على قيم y بنفس الطريقة. بعد قيامك أولا بتحريك المؤشر باستخدام ▶ و ▲.





من المحتمل دوما حدوث أخطاء في الكتابة، وبخاصة في حال جرى إدخال كمية كبيرة من البيانات، بالتالي من الحكمة التحقق من المدخلات.

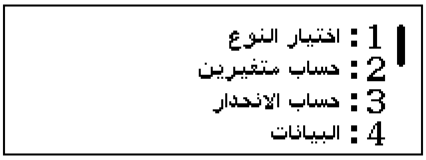
إذا قمت بإجراء خطأ في إدخال قيمة قبل النقر على مفتاح ⊜، يمكنك تصحيحها فورا باستخدام مفتاح DEL ، ثم إدخال القيمة الصحيحة ثم الضغط على ⊜. أما إذا لاحظت خطأ في نقطة بيانية مدخلة سابقا، استخدم المؤشر لتظليل النقاط الغير الصحيحة ومن ثم إعادة كتابتها بالشكل الصحيح.

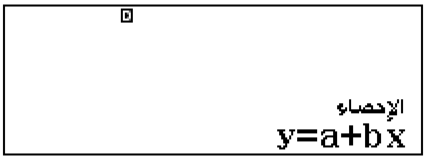
ومع إدخال البيانات، يمكنك التحرك صعودا ونزولا باستخدام ▲ و ▼ أو اليسار أو اليمين باستخدام ◀و ▶. يمكنك التنقل في أي من الاتجاهين، وعلى وجه الخصوص، يمكن الوصول إلى القيمة الموجودة في الأعلى عن طريق القيمة الدنيا في الأسفل، وإلى القيمة الدنيا عن طريق القيمة العليا (وذلك كأن البيانات موجودة في حلقة). إذا قمت بالتحرك ، سترى كيف أن القيم المظللة معروضة بتفصيل وحجم أكبر في أسفل الشاشة مما هي عليه في الجدول وذلك مع نمط الجدول في الآلة الحاسبة.

طريقة سهلة للتحقق من البيانات المدخلة هو عددها. في هذه الحالة، يجري تعليم زوج البيانات الأخير (18,68) على أنه النقطة الـ 14 الأمر الذي يطابق عدد المدخلات في جدول البيانات أعلاه.

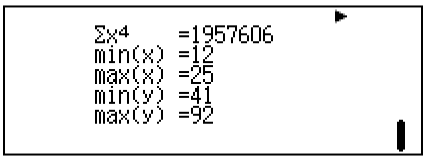
إذا كنت ترغب في إدخال زوج بيانات جديد، بينما ما يزال جدول البيانات معروضا، انقر على 2 OPTN (خيار تعديل).

حالما يتم إدخال كافة البيانات، انقر AC و OPTN للدخول إلى قائمة الإحصاء حيث الصفحة الأولى منها معروضة في الأسفل.





من المفيد التحقق من المدخلات الصغرى والعظمى، لأهميتها كونها تسمح لك بحساب المجال من ناحية، ومن ناحية قد يجري النظر لها على أنها أخطاء طباعية. للوصول إليها من قائمة OPTN في الأعلى، اضغط 2 (خيار حساب متغيرين) ثم استخدم ▼ للنزول للصفحة الرابعة وذلك لرؤية كل القيم الصغرى والعظمى لكل من x و y كما هو موضح في الأسفل.



ونرى كيف أن كل قيمة من هذه القيم الأربعة صحيحة. لتصحيح أي أخطاء، انقر على AC ثم 4 OPTN (خيار البيانات) للعودة لجدول البيانات من أجل تصحيح هذه الأخطاء.

استرجاع البيانات

من المهم دائما التأكد من دقة البيانات قبل القيام بأي تحليل إحصائي. حالما تتأكد من صحة البيانات التي أدخلتها، يمكنك الحصول على الإحصائيات المناسبة باستخدام قائمة OPTN. اضغط على AC لمغادرة جدول البيانات ثم OPTN لعرض القائمة. سترى أربع صفحات من الإحصائيات ضمن الخيار 2 (خيار حساب متغيرين) (الصفحة الرابعة معروضة في الأعلى).

$\bar{x}$	=18
Σx	=252
Σx^2	=4774
$\sigma^2 x$	=17
σx	=4.123105626
$s^2 x$	=18.30769231

sx	=4.278748919
n	=14
$\bar{y}$	=66.85714286
Σy	=936
Σy^2	=66084
$\sigma^2 y$	=250.4081633

σy	=15.82429029
$s^2 y$	=269.6703297
sy	=16.42164211
Σxy	=17734
Σx^3	=94752
$\Sigma x^2 y$	=351788

تسمح لك الصفحة الثانية من قائمة OPTN بمعاينة واستخدام الإحصائيات الفردية. إن متوسط الطريقة الأقصر في قياس النبض (15 ثانية)، والممثل بالرمز $\bar{x}$، متوفر عبر النقر على 2 ومن ثم =. أما متوسط قياس النبض الأطول (60 ثانية)، المتمثل عبر النقر على 5، بعد القيام أولا بالعودة إلى قائمة الإحصاء عن طريق 1 SHIFT ثم 4.

1: المجموع
2: المتغير
3: الأصغر/الأعظم
4: الانحدار

$\bar{x}$	18
$\bar{y}$	66.85714286

ما يزال بإمكانك استخدام الآلة الحاسبة أثناء تواجدك في نمط الإحصاء. على سبيل المثال، لحساب ربع متوسط النبضات الأطول فورا بعد الحصول على نتيجة، استخدم مفتاح الرجوع ◀ من أجل تعديل التعبير وذلك كما هو موضح أدناه:

$\bar{y} \div 4$ 16.71428571

على الرغم من أن هذا قريب من متوسط قياس النبضات في 15 ثانية، إلا أنه أصغر قليلا من ذلك المتوسط، الأمر الذي يشير إلى أن القراءات الأقصر تعطي نتائج أعلى مما هو متوقع.

أما بالنسبة للإحصاءات أحادية المتغير، فهناك قياسان للانحراف المعياري لكل متغير، مع σ لقياس الانحراف المعياري لكامل التعداد و s لقياس الانحراف المعياري لعينة من التعداد، وذلك كما هو موضح في الوحدة 10.

بشكل عام، تعتبر s أكبر قليلا من σ:

σx	4.123105626
sx	4.278748919

إضافة لهذه الإحصائيات، من المفيد أحيانا الحصول على مجاميع النتائج الأصلية ومجاميع مربعاتها على اعتبار أن هذه القيم مستخدمة داخليا من قبل الحاسبة لإجراء العمليات الحسابية الخاصة بالانحراف المعياري. حيث نرى ذلك في الأسفل، حيث جرى الحصول عليها عن طريق النقر على 3 (خيار المجموع).

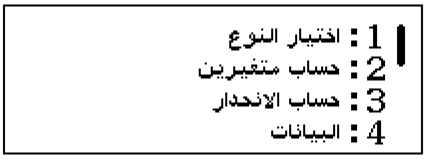
Σx :1	Σx^2 :2
Σy :3	Σy^2 :4
Σxy :5	Σx^3 :6
$\Sigma x^2 y$:7	Σx^4 :8

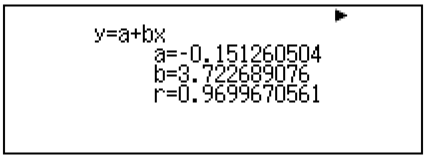
لقد جرى وصف العلاقات بين بعض هذه الإحصاءات وبين حساب المتغيرات والمتوسطات بشكل موجز في الوحدة 10، حيث جرى استخدام هذه المجاميع داخليا في الآلة الحاسبة من أجل إجراء العمليات الحسابية. ولكن، يكون معظم الناس مرتاحين مع السماح للآلة حاسبة باستكمال العمليات الحسابية، وعدم استخدام هذه الإحصائيات مباشرة.

استخدام النموذج الخطي

يعد السبب الرئيسي لدراسة متغيرين في نفس الوقت هو من أجل فهم العلاقة فيما بينهما. تسمح الحاسبة باستكشاف أنواع مختلفة من العلاقات؛ من أهمها تلك التي تتضمن النموذج الخطي $y = a + bx$. في بداية هذه الوحدة، اخترت هذا النموذج في الشاشة الافتتاحية في نمط الإحصاء. تقدم لك الآلة الحاسبة أفضل نموذج لهذا النوع بإستخدامها البيانات المدخلة عبر تقديمها لقيم كل من a و b.

للوصول إلى ذلك، اضغط [OPTN] لعرض قائمة OPTN من أجل نمط الإحصاء، ثم اضغط [3] لعرض العمليات الحسابية الخاصة بقائمة حساب الانحدار:



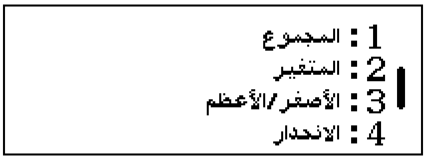


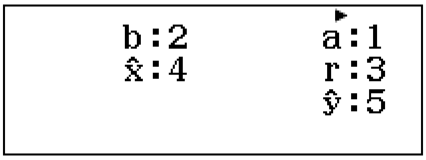
بالتالي، فإن النموذج الخطي الأكثر ملاءمة من أجل هذه البيانات (مقرب إلى منزلتين عشريتين) هو:

$$y = -0.15 + 3.72x \quad \text{أو} \quad y = 3.72x - 0.15$$

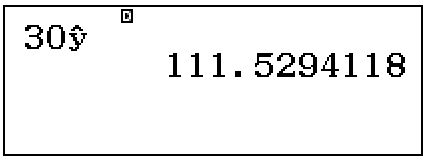
يعتبر هذا قريبا، ولكنه ليس مماثلا لما قد يجري توقعه من أجل النبضات وهو أن y = 4x، اعتمادا على الافتراض بأن عدد النبضات في 60 ثانية هو أربع أضعاف عدد النبضات في 15 ثانية.

تسمح لك الصفحة التالية من قائمة OPTN بالوصول إلى إحصاءات الانحدار الفردية وذلك من خلال الخيار [4] : الانحدار.

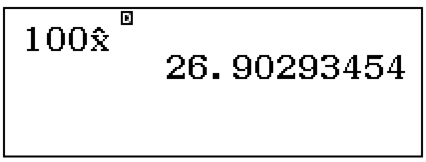




تتيح لك الآلة الحاسبة استخدام النموذج الخطي تلقائيا للتنبؤ بقيم y من أجل قيم محددة لـ x. على سبيل المثال، من أجل التنبؤ بعدد النبضات (y) في 60 ثانية عندما يكون عدد النبضات في 15 ثانية هو $x = 30$، ادخل 30 ثم الأمر $\hat{y}$ في قائمة الانحدار متبوعا بـ [=]:



(تشير العلامة فوق y إلى قيمة تقديرية). من الممكن أيضا استخدام النموذج الخطي تلقائيا للتنبؤ بقيمة x المرتبطة مع قيمة y. على سبيل المثال، من أجل $y = 100$، يتنبأ الأمر $\hat{x}$ أن $x = 26.9$:

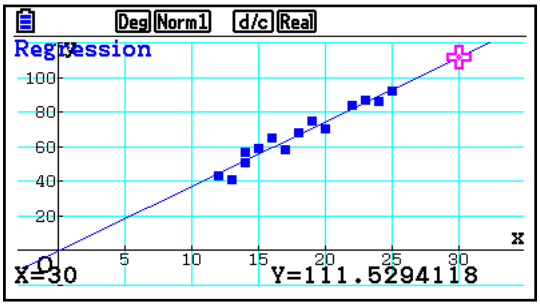


توفر الآلة الحاسبة أيضا قياس لمدى المحاذاة الوثيقة بين البيانات وبين النموذج المدروس. الإحصائية المستخدمة هي *معامل الارتباط*، الممثل بالرمز r والذي يمكن الوصول إليه من قائمة الانحدار. وتقع قيمة r القيمة بين ‎-1‎ و 1، والتي كل واحدة منها تمثل حلا مثاليا للنموذج. في هذه الحالة، يعتبر النموذج الخطي مناسب من أجل هذه البيانات وذلك على اعتبار أن r هي قريبة جدا من 1:

```
r
        0.9699670561
```

من الجيد دوما معاينة البيانات ثنائية المتغيرات بصريا، عبر استخدام رسم بياني يمثل النقاط، بهدف رؤية العلاقة التي قد تتواجد بين المتغيرات. يمكنك فعل ذلك في ورقة رسم بياني، ورسم كل النقاط والنموذج الخطي.

إن الأداة الجيدة القادرة على القيام بهذه المهمة هي الآلة الحاسبة البيانية CASIO fx-CG20. حيث تعرض الشاشة التالية الرسم البياني للإنتشار والنموذج الخطي معا، ما يجعل من السهولة بمكان رؤية كيف أن النقاط تتجمع بالقرب من الخط، وهو ما يؤكد أن النموذج الخطي هو خيار جيد هنا.



تعرض الشاشة أيضا التنبؤ الذي يستخدم النموذج الخطي من أجل x = 30 الأمر الذي يجعل من الواضح أن التوقع هو أيضا خارج نطاق البيانات التي تم جمعها. وتدعى التوقعات القريبة من هذا النوع باسم الاستقراء (*extrapolation*)، وهي تعتبر خطرة إلى حد كبير، في حين تدعى التنبؤات *داخل* مجال البيانات باسم الاستيفاء (*interpolation*) وهي غالبا أكثر قبولا.

نماذج انحدار أخرى

بالرغم من أن العلاقات الخطية هي الأكثر استخداما، تسمح لك آلة ClassWiz الحاسبة في الوقت نفسه باستكشاف علاقات أخرى بين المتغيرات. النماذج الممكنة التي ستراها لدى دخولك نمط الإحصاء في الأسفل (وذلك بعد النقر على OPTN 1 – خيار 1 اختيار النوع).

1: اختيار النوع	1: متغير واحد	y=a•e^(bx):1
2: حساب متغيرين	y=a+bx:2	y=a•b^x:2
3: حساب الانحدار	y=a+bx+cx²:3	y=a•x^b:3
4: البيانات	y=a+b•ln(x):4	y=a+b/x:4

كن حذرا: عند اختيارك لنموذج آخر ثنائي المتغيرات من هذه القائمة، سوف تبقى بياناتك في الآلة الحاسبة. ولكن إذا اخترت بدلا من ذلك نموذج متغير واحد أو نموذج آخر ثنائي المتغيرات عن طريق إعادة الدخول إلى نمط الإحصاء مع النقر على MENU 6، سيؤدي ذلك إلى حذف البيانات وستحتاج لإدخالها من جديد.

النماذج المتاحة هي كما يلي:

2	Linear (خطي)	$y = a + bx$
3	Quadratic (تربيعي)	$y = a + bx + cx^2$
4	Logarithmic (لوغاريتمي)	$y = a + b\ln x$
5	Exponential (أسي)	$y = ae^{bx}$

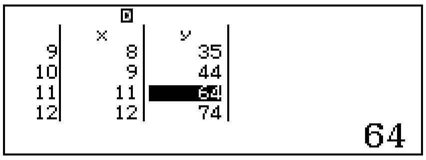
6	Exponential (آسي)	$y = ab^x$
7	Power (أس,قوى)	$y = ax^b$
8	Inverse (معكوس)	$y = a + b \div x$

لاحظ أنه في جميع الحالات تقريبا، تقوم الآلة الحاسبة بتقدير قيم a و b. الاستثناء هنا هو الانحدار التربيعي، وذلك عندما يجري تقدير القيمة الخاصة من أجل المعامل التربيعي c. ومن أجل تأويل نتائج الآلة الحاسبة، تحتاج للتأكد من معرفة أي نموذج يجري استخدامه لوصف هذه البيانات. باستثناء المثال الأول حول النموذج الخطي، تستخدم كل العلاقات الأخرى نماذج *غير* خطية وتدعى مثل هذه النماذج في بعض الأحيان باسم *المنحنيات* (curvilinear)، وذلك على اعتبار أن الرسوم البيانية تعرض منحنيات لا خطوط. وكتذكير مفيد، عندما تكون في نمط الإحصاء، سيجري عرض النمط المختار عندما تنقر على مفاتيح OPTN أو AC.

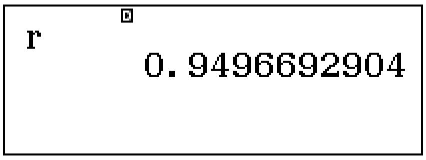
بالنظر لنموذج آخر يتضمن نمو شجيرات التوت. قامت رنا بزراعة شجيرات توت في يوم عيد ميلادها وقياس طولها والذي كان 16 سم. قامت بقياس الشجيرة من جديد يوميا وذلك على مدار 15 شهرا ما عدا الشهر الذي كانت فيه عائلتها في إجازة. وفيما يلي نتائجها:

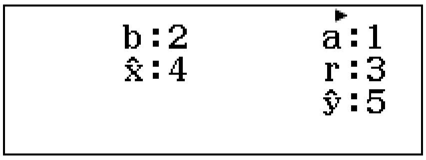
الشهر	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
الطول (سم)	16	18	19	19	24	28	31	34	35	44		64	74	77	101	105

يعتبر النموذج الخطي خيارا جيدا من أجل البيانات، وذلك على الأقل كمحاولة أولى لتمثيل البيانات. من أجل رؤية كيف يمكن تمثيل هذه البيانات بشكل جيد بالنموذج الخطي، انقر على MENU 6 ثم 2 لبدء مجموعة جديدة من البيانات، وهو ما سيؤدي لحذف البيانات السابقة. ادخل الأشهر كمتغير x والأطوال كمتغير y، ولكن لا تدخل أي معلومات في خانة الشهر العاشر وذلك كما هو مبين أدناه.

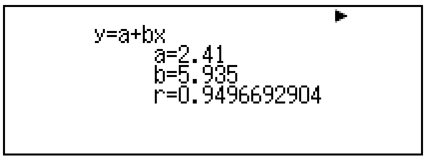


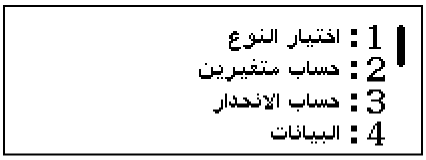
ويمكن الحصول على قياس جيد لتناسب النموذج الخطي مع البيانات من معامل الارتباط r، والذي في هذه الحالة مرتفع قليلا، وذلك كما تبين الشاشة الأولى في الأسفل من قائمة الانحدار:





من أجل رؤية تفاصيل هذا النموذج الخطي، يمكن الحصول على تقديرات للحدود a و b من قائمة الانحدار بشكل منفصل أو عن طريق قائمة حساب الانحدار وذلك كما هو مبين أدناه:





بالتالي فإن النموذج الخطي الأنسب لهذه البيانات هو $y = 5.935x + 2.41$. يقترح هذا النموذج بأن شجيرات التوت تنمو بمقدار 5.9 سم شهريا إبتداءا من طول يزيد قليلا عن 2 سم.

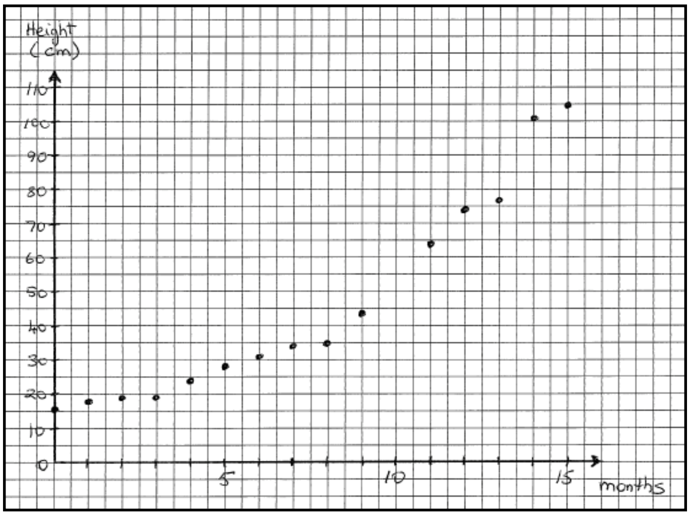
استخدمت رنا هذا النموذج للتنبؤ بالقيمة المفقودة (من أجل $x = 10$). تكمن إحدى الطرق للقيام بهذا عبر استخدام نموذج البارامترات (a و b التي جرى الحصول عليها من قائمة الانحدار) وذلك من أجل قيمة محددة لـ x (مخزنة في ذاكرة x) وذلك كما هو موضح أدناه:


```
10→x
                10
a+bx
             61.76
```

ومع ذلك، يمكن القيام بمثل هذا النوع من العمليات الحسابية بشكل فعال وذلك باستخدام قدرة التنبؤ الموجودة في قائمة الانحدار:

```
10ŷ          61.76
```

شعرت رنا بالقلق من أن النموذج الخطي لا يبدو بأنه يصف النمو بشكل جيد، وذلك بالرغم من معامل الإرتباط العالي. كما لاحظت بأن النمو الفعلي يبدو أن أكبر في نهاية الفترة وأقل في بدايتها وليس كما يقترح النموذج الخطي. إضافة لذلك، يكون الطول الأساسي أكبر من 2.4 سم إضافة إلى أن القيمة المفقودة التي جرى التنبؤ بها تبدو مرتفعة للغاية. بالتالي قررت القيام برسم بياني سريع لإنتشار البيانات وذلك على ورقة رسم بياني كما هو مبين أدناه:

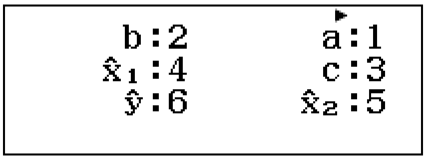


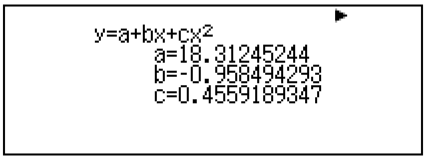
بعد النظر لورقة الرسم البياني الخاصة بها، فكرت رنا بأن العلاقة غير الخطية أفضل من تلك الخطية. بالتالي قررت تجربة النموذج التربيعي بدلا من الخطي.

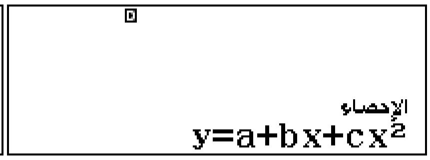
لتغيير النموذج المستخدم، من المهم ألا تقوم ببساطة بالعودة واختيار نموذج مختلف بعد اختيار MENU 6 وذلك لأنه سيؤدي لحذف كل البيانات المدخلة سابقا (وسيجعلك بحاجة لإدخالها من جديد). بدلا من ذلك، انقر على OPTN 1 لتحديد *نوع* النموذج:

1: اختيار النوع 2: حساب متغيرين 3: حساب الانحدار 4: البيانات	1: متغير واحد 2: y=a+bx 3: y=a+bx+cx² 4: y=a+b·ln(x)

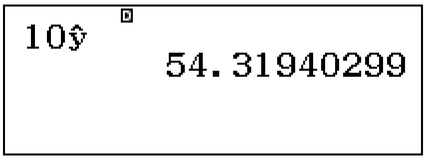
اضغط على 3 لاختيار النموذج التربيعي، ولاحظ كيف أن البيانات لم تُحذف أو تتغير. عندما تقوم بالنقر على AC ، ستذكرك آلة ClassWiz الحاسبة بأنك تستخدم الآن النموذج التربيعي. وتعرض قائمة حساب الانحدار أفضل نموذج من أجل بيانات رنا. ومن أجل النموذج الخطي، تسمح لك قائمة الانحدار بالحصول على تقديرات فردية وإجراء التوقعات.



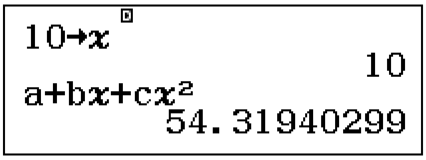




بالتالي، يكون النموذج التربيعي من أجل هذه البيانات هو $y = 18.31 - 0.96x + 0.46x^2$. والطريقة الطبيعية لكتابة هذا هي $y = 0.46x^2 - 0.96x + 18.31$، وذلك حسب الترتيب التنازلي لأس x. ويبدو بأن نموذج احتواء البيانات هذا هو أفضل من النموذج الخطي. بالتالي يمكن استخدامه للتنبؤ بالقيمة المفقودة من أجل x = 10:

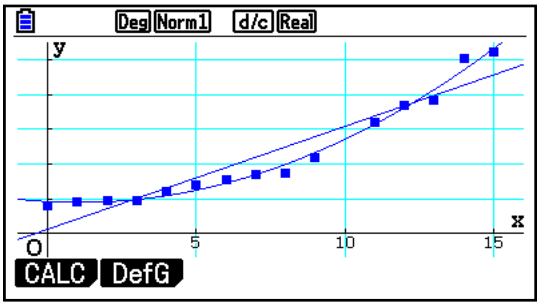


أيضا، من أجل فهم ما الذي تقوم به الآلة الحاسبة ClassWiz، يمكنك القيام بتنبؤ مثل هذا باستخدام معاملات الانحدار a و b و c وذلك كما هو مبين في الأسفل. وكما هو متوقع، سيكون الناتج نفسه.



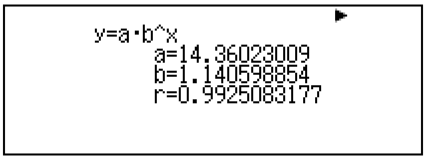
يبدو هذا وكأنه تنبؤ منطقي حيث يمثل منتصف المسافة بين الطول بعد 9 أشهر والطول بعد 11 شهرا. كما يبدو بأنه تنبؤ أفضل من النموذج الخطي في وقت سابق.

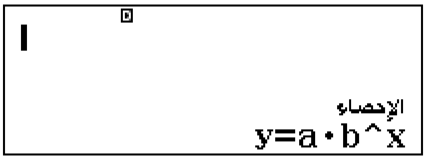
يعتبر الرسم البياني مفيدا من أجل معاينة كيفية تناسب هذا النموذج مع هذه البيانات، وذلك بالرغم من أن عملية القيام بها عملية مملة باليد. مخطط الإنتشار والنماذج المرتبطة، يمكن الحصول عليها عبر استخدام آلة حاسبة بيانية وذلك كما هو موضح في الأسفل. حيث نرى فيها كل من النموذجين الخطي والتربيعي معروضين. من الواضح من أن النموذج التربيعي يتناسب مع البيانات بشكل أفضل من الخطي وذلك لأن المنحنى قريب من معظم النقاط وذلك على عكس الخط المستقيم.



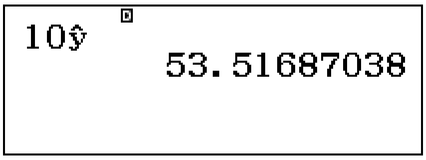
النموذج الأسي

اقترحت صديقة رنا بأن الاختيار الأفضل لنموذج البيانات ممكن أن يكون علاقة أسية من نوع ما (وذلك لأن بياناتها تعكس نموا طبيعيا لشجيرة توت). (جرى التحدث عن الدوال الأسية في الوحدة 6). بالتالي قررت رنا استكشاف هذا من جديد مستخدمة OPTN 1 من أجل اختيار هذا النمط من النموذج من دون خسارة البيانات، وهذه المرة عبر استخدام النموذج الأسي $y = ab^x$. والنتائج موضحة في الأسفل:





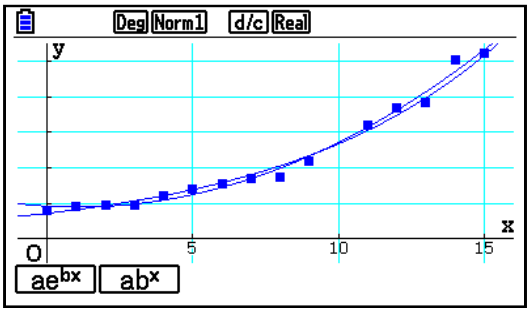
بالتالي فإن النموذج الأسي هو النموذج الأفضل في هذه الحالة حيث $y = 14.36 \times 1.14^x$. باستخدام هذا النموذج، سيكون التنبؤ بالقيمة المفقودة من أجل $x = 10$ قريبا جدا من ذلك المقترح من قبل النموذج التربيعي:



يقترح هذا أنه، في هذه الحالة، أن النموذجين متشابهين تماما.

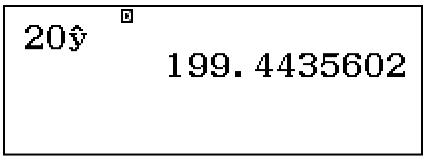
على عكس الحالة التربيعية، تعطي الآلة الحاسبة ClassWiz معامل ارتباط من أجل النموذج الأسي، والموضح أعلاه على أن $r \approx 0.993$. تعتبر هذه القيمة قريبة جدا إلى 1، ولأنها أكبر من قيمة $r = 0.95$ من أجل النموذج الخطي، بالتالي يشير إلى أن نموذج المنحني يناسب البيانات أفضل من النموذج الخطي.

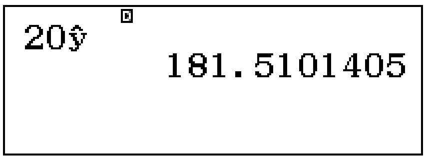
الشاشة أدناه من آلة بيانية تعرض رسمة منحنين لنموذجين جرى استخدامهما هنا، وهما قريبان من بعضهما البعض على مدى بيانات التي تم جمعها.

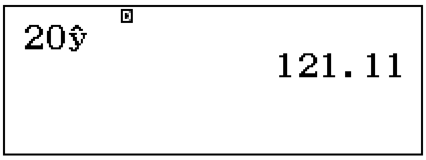


ينبغي توخي الحذر هنا أثناء القيام بالتنبؤات باستخدام نماذج مشتقة من البيانات، وخصوصا عندما تقع التنبؤات خارج مجال البيانات المعطاة. ويعني هذا أنه من المناسب أكثر التنبؤ من أجل $x = 10$ في هذه الحالة (وتدعى العملية بالاستيفاء) بدلا من القيام بتنبؤ لـ $x = 20$ (والتي قد تنطوي على استقراء).

لتوضيح الأخطار، انظر للتوقعات الثلاثة أدناه للأطوال بعد 20 شهرا وفقا للنماذج الخطية والتربيعية والأسية على التوالي:

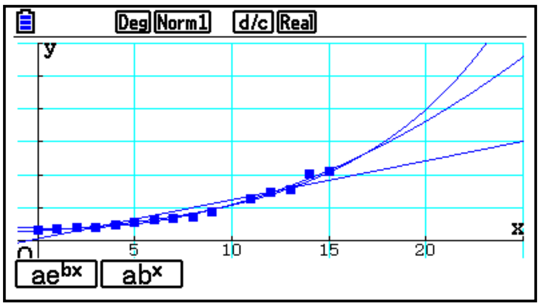






تكون هناك مبالغة في الاستقراء في حال كانت هناك مجموعة صغيرة من البيانات (كما هو حال هذا المثال). بشكل عام، كلما زادت البيانات المدخلة، كانت النتائج الإحصائية أفضل.

لمعرفة كيف ولماذا تعتبر الاستقراءات مختلفة عما هي عليه هنا، من المفيد للنظر للشاشة التي تعرضها الآلة الحاسبة البيانية CASIO fx-CG التي تعرض ثلاث رسوم بيانية في آن واحد.



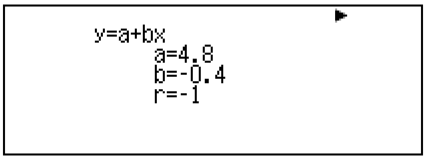
تعرض الشاشة كيف أنه بينما النموذجين المنحنيين متشابهان من أجل مجال البيانات الحالية، تتباعد بعد ذلك بشكل سريع منتجة قيم تقديرية مختلفة كثيرا خصوصا بعد فترات زمنية أعلى (لنقل مثلا بعد عامين – x = 24). وبشكل مشابه، يرى النموذج الخطي بأنه لا يعكس الطبيعة المنحنية لنمو شجيرات التوت وذلك على الرغم تناسبه الحالي مع x = بين 0 و 15.

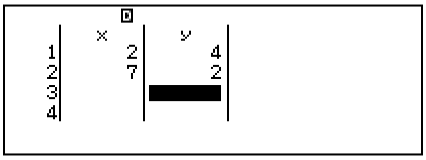
في الممارسة العملية، تعتبر النماذج الخطية مهمة جدا كونها تصف العديد من العلاقات بشكل كاف كما أنها مفيدة للفترات الزمنية القصيرة. وحتى في حال كانت هناك شكوك في أن العلاقة الخطية غير مناسبة لمجموعة البيانات هذه، ما يزال في الإمكان استخدامها كونها أقل تعقيدا من باقي النماذج وأسهل في التعامل. لكن بشكل عام، يجب عليك أخذ سياق البيانات بالحسبان وبخاصة من أجل الفهم المناسب لطبيعة العلاقات بين المتغيرات.

ملاحظة حول تركيب المنحنيات

على الرغم من أنها ليست قضية إحصائية بشكل كامل، قد تكون مهتما بمعرفة أنك قادر على استخدام قدرات آلة ClassWiz في إيجاد معادلات الخطوط والمنحنيات خلال النقاط.

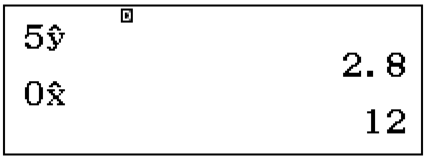
إذا أوجدت النموذج الخطي لنقطتين فقط، فسيكون هو الخط الواصل بينهما. على سبيل المثال، من أجل إيجاد معادلة الخط الواصل بين النقطتين (2,4) و (7,2)، أدخلها وكأنها بيانات ومن ثم اختر النموذج الخطي:



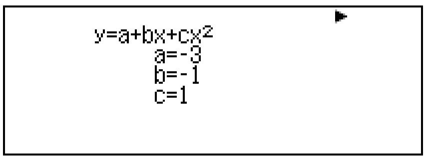


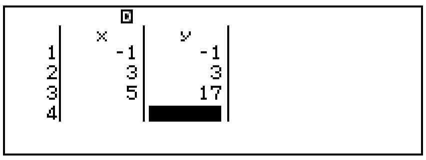
إن نموذج الآلة الحاسبة هو $y = a + bx$؛ بالتالي يملك الخط ميلا مقداره -0.4 وتقاطع مع المحور y قدره 4.8. وتعتبر معادلة الخط هي $y = 4.8 - 0.4x$، والتي يمكن إعادة ترتيبها لتعطي $2x + 5y = 24$.

يمكنك تحديد نقاط أخرى على هذا الخط، باستخدام كل من $\hat{y}$ و $\hat{x}$. تعرض الشاشات في الأسفل كيف أن (5,2.8) هي على الخط وبأن الخط يتقاطع مع المحور x عندما إحداثيات $y = 0$ و$x = 12$.



وبشكل مشابه، يمكن تركيب قطع مكافئ لثلاث نقاط ليست على خط واحد مثل (3,3) ,(-1,-1) و (5,17)، عن طريق اختيار النموذج التربيعي ثم إدخال تلك النقاط بيانيا.





وعلى اعتبار أن الآلة الحاسبة تمثل النموذج على أنه $y = cx^2 + bx + a$، يعطى القطع المكافئ في هذه الحالة عن طريق $y = x^2 - x - 3$. ويؤكد تعويض القيم أن هذا القطع المكافئ يتضمن كل النقاط الثلاثة.

كالدوال الخطية، فيمكنك استخدام هذا النموذج للعثور على نقاط أخرى على القطع المكافئ حيث تعرض الشاشة أدناه $x = 4$ و $x = -2$ وبالتالي النقاط (4,9) و (-2,3) .

```
4ŷ
                9
-2ŷ
                3
```

يعتبر العثور على قيم x من أجل قيمة محددة لـ y أمرا مختلفا قليلا عن النموذج الخطي، وذلك لإمكانية الحصول على أكثر من نتيجة واحدة. وتعرض الشاشة الأولى في الأسفل هذا وذلك مع إيجاد نقطتين (تدعيان x_1 و x_2) واللتان فيهما يتقاطع القطع المكافئ مع المحور x.

$ax^2+bx+c=0$ $x_2=$ $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$ax^2+bx+c=0$ $x_1=$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$0\hat{x}_1$ 2.302775638 $0\hat{x}_2$ -1.302775638

هاتان القيمتان هما الجذران للمعادلة التربيعية $f(x) = x^2 - x - 3$. تحقق بنفسك من أنها تقريب للجذور الحقيقية المعروضة في الأعلى من خلال نمط المعادلة (الموصوف في الوحدة 6).

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة.

1. اهتم بعض طلاب المدارس بأصداف البطلينوس على الشاطئ بالقرب من مدرستهم. اختاروا 20 صَدَفَة عشوائيا وقاسوا عرضها وطولها والنتائج كانت:

العرض (x)	0.9	1.5	1.6	1.7	1.7	1.8	1.9	2.0	2.0	2.1	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4	2.7
الطول (y)	3.1	3.6	4.3	4.7	5.5	5.2	5.0	4.4	5.2	5.4	5.6	5.7	5.8	5.2	5.8	6.2	6.3	6.4	6.3	6.3

a) ارسم مخطط انتشار لهذه البيانات لدراسة العلاقة بين x و y.

b) أوجد متوسط العرض ومتوسط طول الأصداف.

c) أوجد الانحراف المعياري لأطوال وأعراض الأصداف.

d) استخدم الآلة الحاسبة للعثور على النموذج الخطي الذي يربط بأفضل شكل ممكن بين طول (y) الأصداف إلى عرضها (x).

e) استخدام النموذج الخطي الذي حصلت عليه من d) للتنبؤ بطول صدفة عرضها 2.6 سم.

f) أوجد قيمة معامل الارتباط الذي يظهر قوة العلاقة الخطية بين أطوال وأعراض الأصداف.

g) قرر الطلاب معرفة ما إذا كان هناك نموذج آخر من شأنه أن يعرض البيانات بشكل أفضل. أوجد نموذج بصيغة $y = ab^x$. هل هذا يبدو أنه أكثر ملاءمة من النموذج الخطي لبيانات الأصداف؟

2. فحص مكتب الإحصاءات الإماراتي العلاقة بين أعمار الناس وما إذا كانوا يدخلون إلى الإنترنت بانتظام. وحصلوا على البيانات التالية للفترة 2010-2011:

العمر بالسنوات	15-17	18-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74
إمكانية الوصول للإنترنت %	95	96	93	90	85	71	37

a) أنشئ جدول جديد لبيانات العمر (باستخدام نقطة منتصف كل فترة) و النسبة المئوية للأشخاص الذين لا يدخلون إلى الإنترنت.

b) أوجد النموذج الخطي بالنسبة لعمر الناس (x) ونسبة عدم الدخول للإنترنت (y). ما هو معامل الإرتباط لهذا النموذج؟

c) استخدم النموذج من الجزء b) للتنبؤ وتفسير إمكانية الوصول إلى الإنترنت ممن تبلغ أعمارهم 35 عاما. اشرح السبب في أنه لن يكون من المناسب استخدام هذا النموذج لتنبؤ الوصول إلى الإنترنت للأطفال دون سن 4.

d) أوجد النموذج الأسي لعمر الناس (x) ونسبة غير القادرين على الوصول إلى الإنترنت (y). ما هو معامل الإرتباط لهذا النموذج؟

e) استخدام نموذج d) للتنبؤ وتفسير إمكانية من عمرهم 35 للوصول إلى الإنترنت. قارن ذلك مع التنبؤ الذي حصلت في الجزء c).

f) أي النموذجين (النموذج الخطي من الجزء b) أو النموذج الأسي من الجزء d) هو الأفضل لحساب البيانات؟

g) قم برسم مخطط إنتشار للبيانات وقارن إجاباتك مع الجزء f)

3. استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد معادلة الخط الواصل بين النقاط (1.2,3.1) و(4.6,8.2)

4. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معادلة القطع المكافئ التي تصل بين النقاط (1,10)، (2,11) و(5,2).

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. يمكن أن تكون العلاقات بين القياسات البشرية مفيدة جدا لبعض الأغراض، مثل التحقيقات الجنائية أو العمل الأثري. قم بدراسة العلاقة بين ارتفاع وطول نصف قطر عظمة مقدمة الذراع (العظمة التي تمتد من الكوع إلى الرسغ وصولا لجانب الإبهام). قم بالحصول على الأقل على 20 قياس من مجموعة من الناس واستخدم آلتك الحاسبة لإيجاد واستخدام الخط الأكثر ملاءمة للتنبؤ بطول شخص (ارتفاع) مقارنة بطول عظم مقدمة الذراع الخاص به.

2. تعرض البيانات التالية سكان تايلاند (بالملايين) خلال السنوات الأخيرة، وفقا لكتاب حقائق العالم حيث كلمة 'السنة' تشير إلى السنة بعد العام 2000

بعد العام 2000	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التعداد (بالمليون)	61.2	61.8	62.4	64.3	64.9	65.4	64.6	65.1	65.5	65.9	67.1

ارسم مخطط انتشار واستخدام هذه البيانات لبناء نموذج مناسب لنمو سكان تايلاند. تحقق من النموذج الخاص بك مع البيانات السكانية التايلاندية الأخيرة. (على سبيل المثال، استخدم النموذج الخاص بك

للتنبؤ بعدد سكان تايلاند اليوم ومن ثم تحقق على شبكة الإنترنت لمعرفة مدى قرب التنبؤ الخاص بك من الحقيقية).

3. يحب مالك لعب ألعاب الكمبيوتر، حيث قام مؤخرا بتنزيل لعبة جديدة تملك 56 مرحلة. قام هو بتسجيل أعلى مستوى تمكن من الوصول إليه في نهاية كل أسبوع من عشرة أسابيع متتالية وذلك كما هو موضح في الأدنى.

الأسبوع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
أعلى مستوى	2	8	11	14	15	16	18	18	20	23

عندما رسم مخطط انتشار البيانات، اعتقد مالك بأن النموذج اللوغاريتمي قد يكون خيارا جيدا لمنحنى التعلم الخاص به. استخدم هذه البيانات لإيجاد نموذج لوغاريتمي مناسب لتعلمه، ثم استخدم النموذج الخاص بك لإيجاد بعض التوقعات، مثل المستوى الذي سوف يصل إليه بعد 20 أسبوعا أو المستوى الذي سيصل إليه بعد 40.

4. السجلات الرياضية تصلح للتحليل الإحصائي. على سبيل المثال، تظهر البيانات في الأسفل الأرقام القياسية العالمية لعام 2013 لألعاب القوى للرجال على مسافات مختلفة.

المسافة (م)	100	200	400	800	1500	2000	3000
الرقم القياسي (ثانية)	9.58	19.19	43.18	100.91	206.00	284.79	440.67

استخدم هذه البيانات لبناء نموذج مناسب للتنبؤ بالرقم القياسي العالمي لمسافات مختلفة. استخدم النموذج الخاص بك للتنبؤ بالرقم القياسي العالمي للرجال من أجل سباقات 1000 متر و 5000 متر. ثم قارن توقعاتك مع السجلات الفعلية (والتي يمكن العثور عليها على شبكة الإنترنت). جرب سجلات رياضية أخرى مشابهة وذلك باستخدام البيانات الموجودة على شبكة الإنترنت.

5. عدة هناك دول تقوم بتنفيذ مشاريع يقوم فيها الطلاب بتحميل بيانات عنهم من شبكة الإنترنت حيث تكون هناك عينة عشوائية من البيانات متاحة للتحميل والتحليل. قم بتحديد موقع مشروع مثير لاهتمامك مماثل لهذه الفكرة، مستخدما شبكة الإنترنت وقم بتحميل عدد من البيانات ضمن مجموعة مكونة من 20-30 إجابة لطلاب مع ورقة الترميز التي تصف البيانات. استخدام عينة لتحليل زوج مناسب من المتغيرات (أي تلك التي تنطوي على قياسات رقمية) وقارن تحليلك مع الآخرين.

6. انظر من جديد للبيانات التي حصلت عليها رنا والخاصة بشجيرات التوت. على اعتبار أن مخطط الانتشار يعطي نموا متسارعا. يكون هناك تحليل بديل متمثل في مقارنة الشهر مع لوغاريتم الطول. قم بتحليل البيانات مرة أخرى لإيجاد النموذج *الخطي* من أجل مقارنة الشهر مع اللوغاريتم الطبيعي للأطوال. (على سبيل المثال، ضع نقاط مثل (0, ln 16) و (1,ln 18) ...إلخ في الجدول). قارن نتائجك مع النموذج الأسي في الوحدة.

ملاحظات من أجل المعلمين

تسلط هذه الوحدة الضوء على الطريقة التي يمكن فيها للآلة الحاسبة *ClassWiz* مساعدة الطلاب على التفكير بتحليل البيانات ثنائية المتغير حيث يقوم بالاستفادة من نمط الأحصاء كأداة هامة. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل وتحليل مختلف الإحصائيات ثنائية المتغيرات. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. b) 2.01سم، 5.3 سم،   c) $s_x = 0.40,\ s_y = 0.91$ d) $y = 2.06x + 1.16$
e) 6.52سم   f) 0.90   g) $y = 2.17 \times 1.55^x$؛ ولا يبدو هذا النموذج أفضل من النموذج الخطي. إن العلاقات هنا مشابهة لـ $r \approx 0.91$

2. a) إن البيانات في الجدول هي: (16,5), (21,4), (29.5,7), (38.5,10), (49.5,15), (59.5,29), (69.5,63).   b) $y = 0.93x – 18.6$؛ $r \approx 0.87$

c) $\hat{y} = 13.8$ ، وهو ما يقترح أن حوالي 86% من ذوي عمر 35 عاما يملكون اتصالا بالإنترنت. لا يمكن استخدام هذا النموذج لاستقراء الأطفال الصغار.

d) استخدم SHIFT 1 1 6 لاختيار نموذج أسي، $y = 1.68 \times 1.05^x$؛ $r = 0.98$ e) $\hat{y} = 9.2$ ، وهو الذي يقترح بأن حوالي 91% ممن أعمارهم 35 عاما يستطيعون الوصول للإنترنت.   f) تبدو الدالة الأسية أفضل، بما أن معامل الإرتباط أعلى.   g) يقترح مخطط الانتشار أن النموذج الأسي أفضل.

3. $y = 1.5x + 1.3$ 4. $y = -x^2 + 4x + 7$.

النشاطات

1. من المهم للطلاب المشاركة في تحليل البيانات الحقيقية، وهي الهدف الرئيسي من هذا النشاط. أكد على أخذ قياسات دقيقة وشجع الطلاب على الحصول على قياسات لمجموعة من الناس (مثل الأشقاء الأصغر سنا) لتحسين النماذج الإحصائية المعنية. ومن المرجح أن تكون العلاقة خطية نوعا ما

2. تصلح بيانات المتسلسلات الزمنية لأن تكون ثنائية المتغير حيث يجري التعامل معها بشكل جيد من قبل الآلة الحاسبة. على مدى فترات قصيرة من هذا النوع، يكون النموذج الخطي مناسبا، على الرغم من أن النموذج الأسي سيكون أفضل للفترات الأطول [الإجابات: y (بالملايين) = $0.51x + 61.81$، $r \approx 0.93$]

3. شجع الطلاب على رسم مخطط الانتشار للتأكد من أن النموذج اللوغاريتمي يبدو معقولا. (اختر نموذج 4 بعد تحديد نمط الإحصاء). سيعطي النموذج الخطي نتائج مختلفة بشكل ملحوظ، بالتالي يجب تشجيع الطلاب على جمع بعض البيانات من هذه الأنواع لأنفسهم. [الإجابات: y (level) = $1.95 + 8.31 \ln x$ ، $r \approx 0.99$. بعد 20 أسبوعا، سيصل للمستوى 26، ولكن بعد 97 أسبوعا سيصل للمستوى 40، وفقا لهذا النموذج].

4. يمكن أن يكون ترافق المنحنيات مع البيانات تمرينا مفيدا من أجل الطلاب وذلك بالرغم من وجوب أخذ الحذر في عدم الإفراط في تفسير النتائج أو استخدام الدقة المتناهية. في هذه الحالة، يبدو النموذج الخطي مناسبا. [الإجابات: $y = 0.15x - 13.30$، $r \approx 0.99$. التوقعات: 1000 م: 136.38 ثانية (استيفاء). 5000 متر: 735.08 ثانية (استقراء). الأرقام القياسية في عام 2013 كانت 131.96 ثانية و757.35 ثانية].

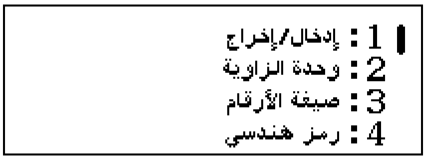
5. قد ترغب في التحقق في وقت مبكر من موقع ما والطلب من الطلاب الذهاب إليه للمقارنة. يمكن لكل طالب تحميل مجموعة بيانات مختلفة ما يساعدهم على فهم اختلاف عملية أخذ العينات، أو يمكن تعريفهم كلهم بمجموعة بيانات واحدة وذلك اعتمادا على تفضيلاتك وإمكانية الوصول إلى الإنترنت.

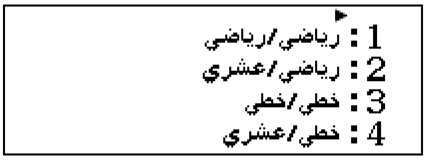
6. تعتبر تحليلات اللوغاريتم الخطية الطريقة الأكثر قوة وشيوعا لاستخدام الانحدارات الخطية للبيانات المنحنية حيث سيكشف مخطط على ورقة رسم بياني نصف لوغاريتمي أو الأشهر في مقابل اللوغاريتمات الخاصة بالأطوال علاقة خطية قوية هنا ويقدم فرص مناقشة جيدة لطلاب الدراسات العليا. [الإجابات: النموذج الخطي هو: $\ln(y) = 0.13x + 2.66$ مع $r \approx 0.99$، وذلك بالنسبة للنموذج الأسي. لاحظ بشكل خاص كيف أن $e^{2.66} = 14.36$ و $e^{0.13} = 1.14$، وهما معاملان النموذج الأسي في النص].

الوحدة 12
الاحتمالات

تعد الاحتمالات جزءا هاما من الرياضيات الحديثة والحياة العصرية وذلك على اعتبار وجود الكثير من الأشياء التي تتضمن العشوائية. وتعتبر آلة ClassWiz مفيدة في حساب الاحتمالات وخصوصا تلك التي تعتمد على التوافقيات أو تلك التي تستخدم التوزيع. ومن المفيد أيضا محاكاة الأحداث مع وجود احتمالات معروف.

في هذه الوحدة، وعلى عكس باقي الوحدات، من الأفضل ضبط الآلة الحاسبة لاستخدام المخرجات الخطية. من أجل القيام بهذا، قم باختيار 1 (إدخال/إخراج) من شاشة الإعدادات ثم اختر 3 (خطي/خطي) من أجل شكل النتيجة وذلك كما هو مبين أدناه.





احتمالية حدث

هناك طريقتان للتفكير في احتمال وقوع حدث ما. عندما تكون النتائج في فضاء عينة هي متساوية من الناحية الاحتمالية نظريا، يمكنك التفكير باحتمالية وقوع حدث E على أنه:

$$\Pr(E) = \frac{\text{Number of favourable outcomes}}{\text{Total number of outcomes}}$$

أي: العدد الإجمالي للنتائج الإيجابية مقسوم على عدد النتائج الإجمالي.

على سبيل المثال، واعتمادا على هذا التعريف، فإن احتمال الحصول على رقم 4 أثناء محاولة رمي نرد ذي 6 أوجه هي 1/6.

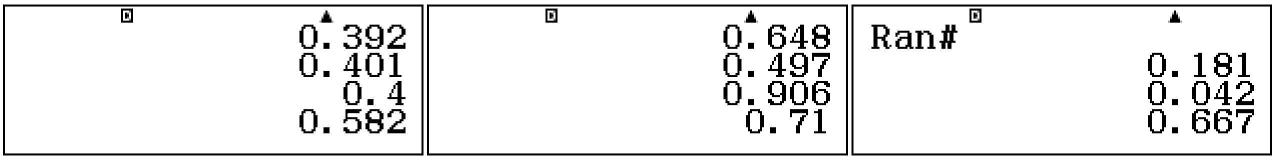
عندما لا تكون النتائج معروفة بتفاصيل كافية لعدها أو أن احتمال حدوثها غير متساوي، يجري تقدير احتمالية وقوع الحدث بطريقة تكرار نسبي على المدى الطويل لهذا الحدث. على سبيل المثال، لنفترض أنه جرى اختبار 10,000 بطارية لمعرفة إذا ما كان ستستمر أكثر من 30 يوما حيث وُجد بأن هناك 7,200 واحدة منها تستمر أكثر من 30 يوما. بالتالي فإن احتمال استمرار بطارية لأكثر من 30 يوما (وجرى اختيارها عشوائيا) هو 72,00 ÷ 10,000 أو ما يقارب 72%.

محاكاة أحداث

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لمحاكاة أحداث عشوائية عبر استخدام أمري *Ran#* أو *RandInt*.

يقوم أمر العدد العشوائي *Ran#* بتوليد عدد عشوائي (بين 0 و1) في كل مرة يجري النقر عليه. إن الأرقام الصادرة ستكون متساوية الاحتمالية للظهور أمامك على المدى الطويل. على سبيل المثال، يجب أن تتوقع الحصول على رقم بين 0 و 0.4 على فترة 40% من الوقت، وعلى المدى الطويل.

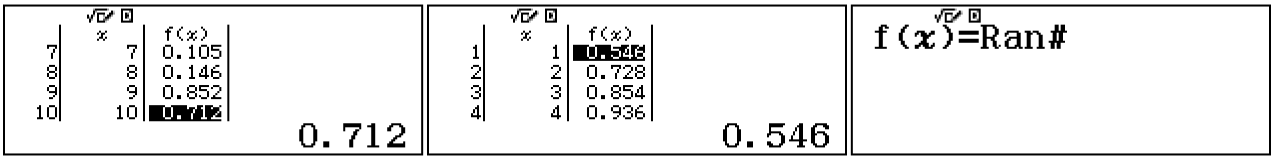
بعد استخدامك الأمر لأول مرة (مع SHIFT • =)، سيقوم النقر المتكرر على = بإنتاج أرقام عشوائية مختلفة في كل مرة (بين 0 و 1) حيث تعرض الشاشات أدناه بعض الأمثلة. لن تتشابه الأرقام الموجودة هنا مع الأرقام التي ستتولد معك على اعتبار أن هذه الأرقام جرى توليدها عشوائيا.



يتم عرض الأرقام العشوائية عموما مقربة إلى ثلاث خانات عشرية، ولكن في حال كانت آخر خانة عشرية إلى اليمين هي صفر (كما هو الحال في الشاشة الوسطى أعلاه)، ستعرض الآلة الحاسبة خانتين فقط من الخانات العشرية.

بشكل استثنائي (نظريا، احتمال حدوث ذلك هو حوالي 1%)، في حال كانت كلتا الخانتين إلى اليمين صفرا، ستقوم الآلة الحاسبة بالتالي بتقديم خانة عشرية واحدة وذلك كما تعرض الشاشة الثالثة.

إضافة إلى عملية محاكاة نتائج فردية (مع كل نقرة على مفتاح (=))، يمكن محاكاة مجموعة مؤلفة من 30 نتيجة بجدول كحد أعلى. من أجل القيام بذلك، ادخل لنمط الجدول (باستخدام MENU 8) ثم عرف الدالة كما هو مبين في الأسفل.

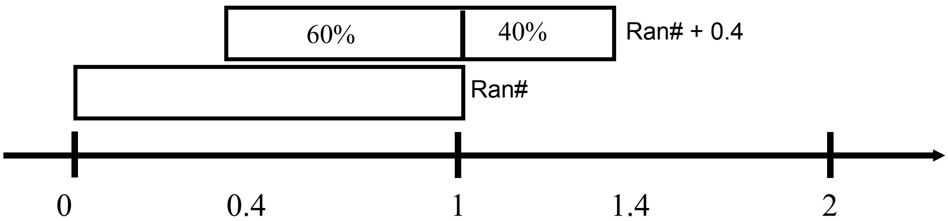


انقر = ثم عين البدء (Start) = 1، النهاية (End) = 10، والخطوة (Step) = 1، كل واحدة منها متبوعة بزر =. سيجري توليد جدول من عشرة أرقام عشوائية (مثل تلك الأرقام في الأعلى إنما مختلفة في القيم). يمكنك التنقل صعودا وهبوطا مع مفاتيح المؤشر مع استخدام مفتاح ▶ أولا ومن ثم مفتاحي ▲و▼ .

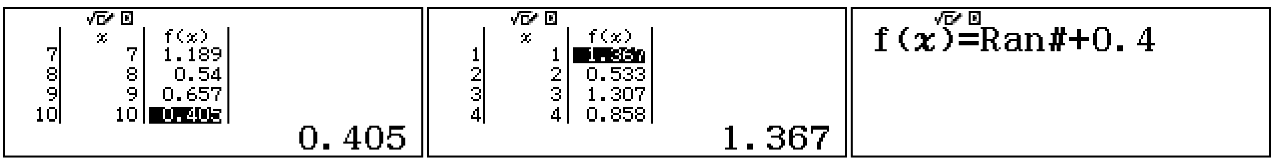
لننظر من جديد في احتمالية الحصول على 0.4. في هذه الحالة بالذات، هناك فقط ثلاثة أرقام من أصل عشرة أرقام عشوائية هي أقل من 0.4، وذلك بدلا من أربعة أرقام كما كان متوقعا في دراسة احتمال تكرر أرقام أقل من 0.4. يعد ما سبق أمرا طبيعيا نظر للطبيعة العشوائية التي يجري فيها توليد الأرقام. (لرؤية كيف أن هناك ثلاثة أرقام فقط أقل من 0.4، احتجنا للتنقل عبر عشر قيم. ستكون قيمك مختلفة عن هذه طبعا). تذكر أن هذا فقط هو على المدى البعيد، وفيه ستتطابق النتائج على أرض الواقع مع النتائج النظرية.

إذا قمت بإعادة توليد أرقام جديدة للجدول (على سبيل المثال، النقر على AC ثم النقر على = ثلاث مرات، سيجري وضع مجموعة جديدة من الأرقام العشوائية في الجدول بدل تلك السابقة).

من الصعب التحرك عبر، وقراءة وتفسير قيم المحاكاة الفردية، بالتالي من الأسهل أحيانا توليد أرقام أسهل تحديدا. ما نزال نفكر باحتمالية 0.4 أو 40%. انظر للمخطط التالي في الأسفل والذي يعرض آثار توليد أرقام عشوائية باستخدام الأمر 0.4 + Ran#.



يشير الرسم البياني إلى أن 40% من الأعداد ستقع بين 1 و 1.4. يعني هذا، أنها ستبدأ بخانة 1، في حين أن 60% المتبقية ستبدأ بخانة 0. ومن الأسهل التعرف على هذه الأرقام في جدول مع وضع تلك التي تبدأ بـ 1 على أنها "فوز" وتلك التي بدأت مع 0 على أنها "خسارة".

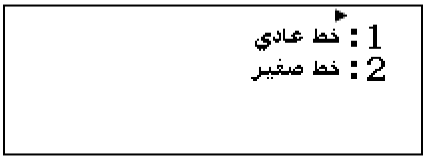


في هذه الحالة، هناك خمسة أرقام عشوائية قد بدأت بخانة 1، بالتالي فإن المحاكاة أنتجت خمسة مرات نجاح. الغرض من استخدام أمر التحويل 0.4 + *Ran#* هو فقط لجعل الأمر أكثر سهولة للإدراك هذه الأرقام دون أخطاء. لا يغير هذا من احتمال محاكاة الحدث.

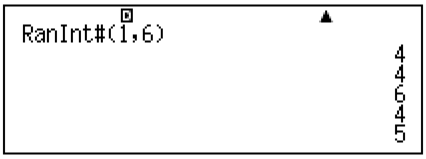
محاكاة بأعداد صحيحة

بالنسبة لكثير من التطبيقات العملية، من الملائم استخدام محاكاة عشوائية بأعداد صحيحة بدلا من أعداد عشرية. لهذا الغرض، يعتبر الأمر RanInt (يمكن الحصول عليه عبر ALPHA .) مفيدا للغاية حيث ستقوم الآلة الحاسبة هنا بتوليد أعداد صحيحة عشوائيا موزعة بانتظام على فاصل زمني من اختيارك.

لرؤية أكثر من نتيجة واحدة في كل شاشة، من المفضل استخدام شاشة الإعدادات SET UP من أجل الانتقال المؤقت لاستخدام الخط الصغير: وذلك كما هو مبين أدناه

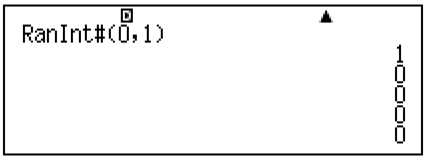


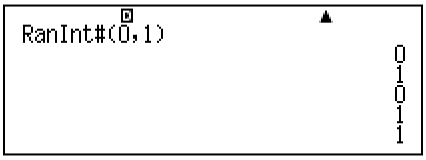
مع هذه الإعدادات، ستعرض الشاشات أدناه توليد رميات نرد بنرد عادي بست أوجه، بالتالي سوف نحصل على احتمال وجود عدد من مجموعة الأعداد {1، 2، 3، 4، 5، 6}. يتطلب الأمر وجود فاصلة من أجل الفصل بين العدد الصحيح الأول والأخير. (ستحتاج للضغط على) SHIFT) للحصول على ذلك. تؤدي كل نقرة على مفتاح = إلى إنتاج محاكاة رمية زهر.



هنا، أنتجت المحاكاة ثلاث أربعات، وخمسة واحدة وستة واحدة انطلاقا من خمس محاولات رمي.

يعتبر هذا الأمر مفيدا من أجل محاكاة عمليات برنولي، والتي يمكن أن تؤدي إلى إنتاج نتيجتين. عندما يكون لدينا احتمالية حدوث نتيجة واحد بالتساوي من أصل 2 (مثل قذف عملة وعد مرات الحصول على رأس (0 أو 1)، سيجري الحصول على تلك الاحتمالات بشكل مباشر. تعرض كل شاشة من الشاشات في الأسفل نتائج رمي قطعة نقدية لخمس مرات. نرى في الشاشة الأولى حصولنا على 3 مرات رأس، وفي الثانية 1 مرة.





يجب التفكير بعناية بالأحداث التي يجري محاكاتها. على سبيل المثال، لدى رمي نردين، من الضروري محاكاة نتائج كل نرد بشكل منفصل. ويعني هذا أن علينا استخدام الأمر

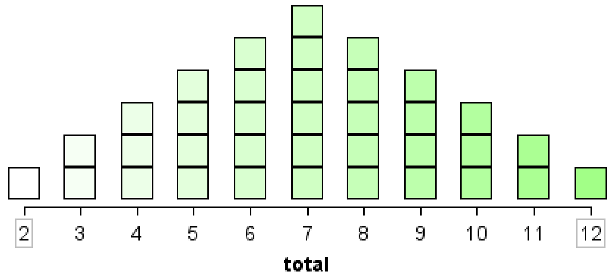
RanInt(1,6) + RanInt(1,6)

وليس الأمر *RanInt(2,12)*

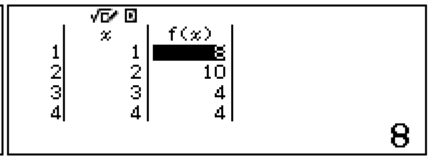
صحيح أن كلا الأمرين سيقومان بمحاكاة رميات الزهر بين 2 و12، إلا أن الأمر الثاني سيعطي احتمالات متساوية لظهور أي رقم من المجال {2، 3، 4، ...، 11، 12}، وهو أمر لا يمكن أن يحصل عمليا. لمعرفة سبب ذلك، انظر للمخططات التالية في الأسفل حيث يعرض المخطط على اليسار يظهر فضاء عينة مؤلف من 36 نتيجة محتملة لرمي نردين. في هذا المخطط، سترى كيف أن احتمالية حدوث المجموع 11 هي احتمالية نادرة

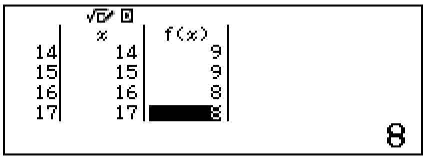
نظريا (فقط 5،6 و6،5 تنتجان 11)، في حين احتمالية ظهور أرقام أخرى تكون أكبر بكثير (انظر مثلا كيف أن هناك 6 طرق مختلفة للحصول على ما مجموعه رقم 7).

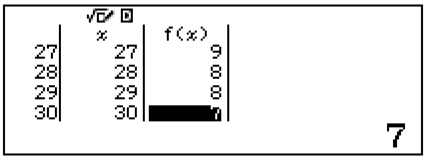
$$\begin{bmatrix} 1,6 & 2,6 & 3,6 & 4,6 & 5,6 & 6,6 \\ 1,5 & 2,5 & 3,5 & 4,5 & 5,5 & 6,5 \\ 1,4 & 2,4 & 3,4 & 4,4 & 5,4 & 6,4 \\ 1,3 & 2,3 & 3,3 & 4,3 & 5,3 & 6,3 \\ 1,2 & 2,2 & 3,2 & 4,2 & 5,2 & 6,2 \\ 1,1 & 2,1 & 3,1 & 4,1 & 5,1 & 6,1 \end{bmatrix}$$



يعرض المخطط على اليمين فضاء العينة النظري مرتب من ناحية احتمالية الحدوث الأمر الذي يجعل من السهولة بمكان رؤية كيف أن المجاميع 2، 3، ...، 12 غير متساوية في معدل ظهورها على اعتبار أن النتائج النظرية بعيدة المدى لن تحدث دائما في الممارسة اليومية. تعرض الشاشات في الأسفل بعض النتائج المتحصلة من رمي نردين لـ 30 مرة باستخدام هذه الدالة *f*(*x*) = *RanInt(1,6) + RanInt(1,6)*. اجعل البداية 1 والنهاية 30 واجعل الخطوة 1.







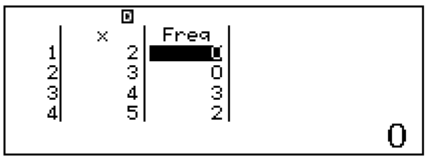
في هذه الحالة، أحصينا النتائج الـ 30 التي جرى الحصول عليها يدويا وكان التوزيع:

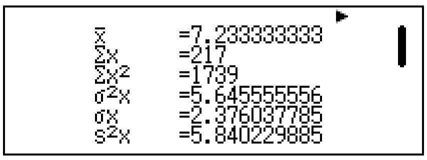
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	النتيجة
1	0	3	4	9	5	3	2	3	0	0	التكرار

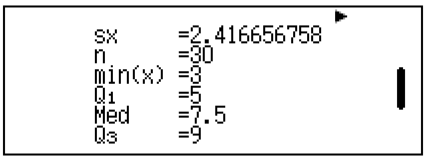
كما هو متوقع، لا يتماثل التوزيع في هذا الجدول مع التوزيع النظري المبين أعلاه (والذي بدوره يعرض ما سيحدث على المدى الطويل نظريا). في كل مرة يجري محاكاة مجموعة من رميات النرد، سنحصل على نتيجة مختلفة. على سبيل المثال، إليك مجموعة أخرى من 30 رمية نرد:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	النتيجة
2	1	1	5	6	3	4	4	2	2	0	التكرار

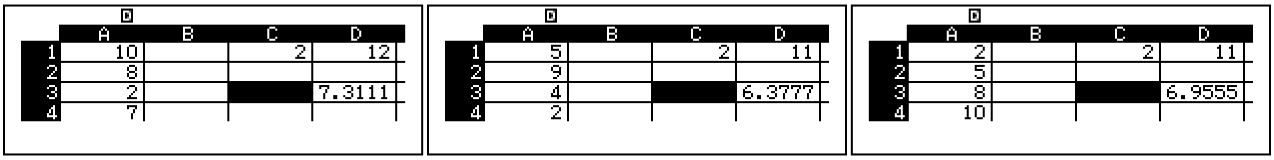
يمكن تحليل النتائج مثل هذه في نمط الإحصاء (والذي جرى التطرق إليه في الوحدة 10). على سبيل المثال، إليك ملخص موجز لأول مجموعة من 30 رمية نرد.







قم بتوليد بياناتك الخاصة وقارنها مع هذه لترى أوجه الشبه والاختلاف (ستوضح لك الوحدة 13 كيفية إنشاء محاكاة وتحليل نرد مؤلف من 8 أوجه، وذلك باستخدام جداول البيانات في ClassWiz والتي هي أكثر كفاءة من الجدول). تظهر الشاشات أدناه ثلاثة أمثلة منفصلة لهذا لنردين بـ 6 أوجه. في كل حالة، ستكون النتائج موجودة في العمود A، ومتوسط 45 رمية نرد في الخلية D3 والقيمتين الصغرى والعظمى في الخليتين C1 و D1 على التوالي.



نرى في هذه النتائج تباينا واضحا. على سبيل المثال، لا يوجد في أول محاكاتين أي مجموع 12، بينما يتراوح المتوسط من 6.4 إلى 7.3. وهذه هي طبيعة العشوائية. قارن هذه النتائج مع نتائجك ونتائج آخرين.

التوافقية

تهتم التوافقية بالعد المنهجي للأشياء. من المهم هنا أن تكون قادرا على القيام بذلك من أجل تحديد الاحتمالات النظرية في الكثير من الحالات العملية. وغالبا ما تكون الأرقام المتضمنة في هذه الحالات كبيرة جدا، بالتالي فإن حسابها في الآلة الحاسبة غالبا ما يكون ضروريا.

على سبيل المثال، عدد الطرق التي يمكن فيها ترتيب مجموعة من الأشياء المختلفة بشكل منتظم – وهو الأمر المعروف باسم التباديل – غالبا ما ينطوي على مضروب الأرقام. هنا مثال صغير:

ينهي ثلاثة أطفال سباق الجري. إذا لم يكن هناك تعادل (مراكز متساوية)، بأي تراتيب ممكنة يمكنهم إنهاء السباق؟

في هذه الحالة، يمكن سرد كل الاحتمالات المختلفة. إذا جرى تمثيل الأطفال الثلاثة بالرموز A و B و C، بالتالي فإن مجموعة كاملة من ستة احتمالات هي معروضة في الأسفل.

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

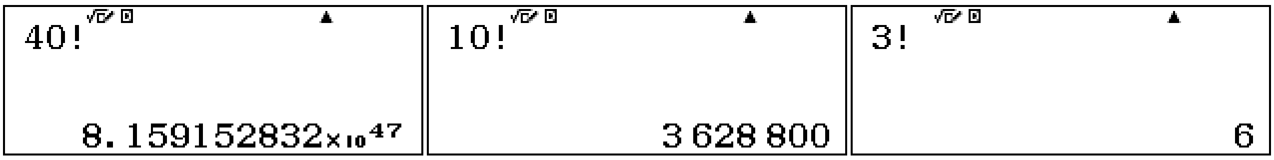
ويمكن تحليل هذه المشكلة عن طريق الإشارة إلى أن هناك ثلاثة احتمالات مختلفة لأجل المركز الأول؛ وحالما يجري تحديد المركز الأول، من أجل كل مركز أول هناك احتمالين من أجل المركز الثاني، وحالما يجري تحديد المركز الثاني، هناك احتمالية من أجل تحديد المركز الثالث. بالتالي يكون العدد الإجمالي للترتيب هو:

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

يمكن تعميم هذا التحليل، بالتالي فإن عدد التراتيب أو التباديل الخاصة لعدد n من الأشياء المختلفة يعطى بـمضروب n، والذي هو

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

وغالبا ما يكون مضروب أي عدد كبيرا جدا، وأكبر حتى من القدرة على حسابها يدويا. بالتالي تملك الآلة الحاسبة أمر x! (SHIFT x^{-1}) لهذا الغرض:



تعرض الشاشات كيف أن هناك أكثر من 3.6 مليون ترتيب مختلف لمراتب 10 طلاب أنهوا السباق وتقريبا 10^{48} ترتيب مختلف لـ 40 طالبا أنهوا السباق. لا يمكن للآلة الحاسبة معالجة مضروب أكبر من !69 لأن الرقم الناتج أكبر بكثير من قدرة الآلة الحاسبة على احتوائه، حيث تقوم هي بمعالجة أرقام أقل من 10^{100} فقط.

في بعض الحالات، نحن مهتمون بعدد التباديل المحتملة، ولكن لمجموعة محدودة. على سبيل المثال، إذا دخل عشرة أطفال سباق، كم ستكون النتائج المحتملة من أجل المراكز الأول والثاني والثالث (من جديد، افترض عدم وجود تعادل)؟

باستخدام نفس المنطق، هناك عشرة خيارات للمركز الأول، ثم تسعة خيارات للمركز الثاني، وأخيرا ثمانية خيارات للمركز الثالث. إجمالا، فإن عدد التباديل المختلفة هو

$$10 \times 9 \times 8.$$

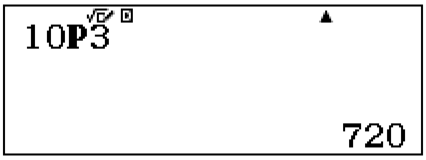
يمكن التفكير بهذا على أنه

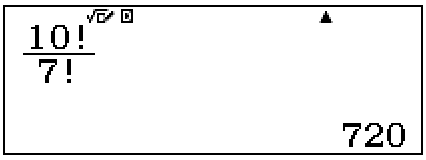
$$\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{10!}{7!}$$

ويعتبر الرمز الرياضي لهذه النتيجة الخاصة لحساب عشر تباديل وثلاثة منها في كل مرة هو $_{10}P_3$. بشكل عام، يقترح نفس المنطق بأن التباديل لعدد كائنات n مأخوذ منها r عند زمن ما هو

$$nPr=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

في الممارسة العملية، يمكن القيام بالعمليات الحسابية بشكل كامل، لكن الأسهل استخدام أمر التباديل nPr على الآلة الحاسبة (عبر SHIFT ×). لاحظ أن عليك أولا إدخال قيمة n، متبوعة بالأمر، متبوعة بقيمة r.





توضح هذه الشاشات كيف أن هناك 720 تباديل مختلفة أو تراتيب يمكن فيها ملء المراتب الثلاثة الأول من هؤلاء الطلاب العشرة فقط. هناك العديد من الناس يتفاجؤون بأن هذا العدد كبير جدا.

وهناك نوع ثالث من التوافيق، أو العد، المشكلة هي حساب عدد من التوافقات المختلفة وذلك بغض النظر عن الترتيب. في هذه الحالة، قد نهتم بعد عدد المرات التي يجري فيها الحصول على المراتب الثلاثة الأولى من مجموعة من عشرة من الطلاب، ولكن من غير المهم من هو الأول أو الثاني أو الثالث. ويجري تعريف ذلك على أنه عدد التوفيقات الخاصة بعشرة طلاب والمأخوذ ثلاثة في كل مرة والمعرف بالشكل

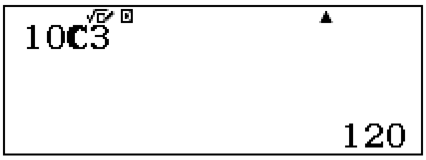
$$10C3=\frac{10P3}{3!}=\frac{10!}{(10-3)!3!}$$

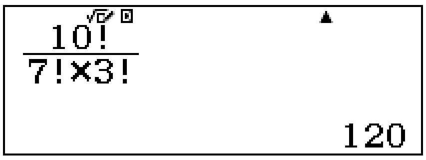
لأنه حالما يجري اختيار مجموعة من ثلاثة، لا نريد عد كل !3 والتباديل فيما بينهم.

بشكل عام، إن عدد توافيق أشياء عددها n تؤخذ r في كل مرة هو

$$nCr=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

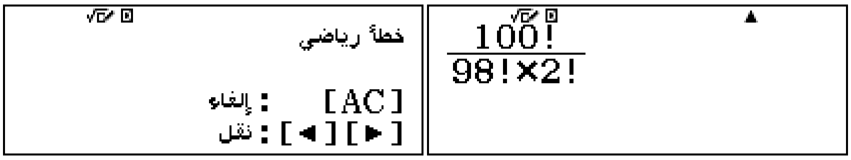
تظهر الشاشات في الأسفل كيف أن هذه القيمة محددة بشكل مباشر باستخدام أمر توافيق الآلة الحاسبة nCr عن طريق SHIFT ÷:



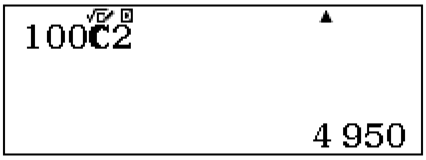


إحدى ميزات استخدام أمري nCr وnPr أنهما يسمحان باستخدام أرقام أكبر في العمليات الحسابية. على سبيل المثال، إذا كان لدينا 100 طالب في القاعة وقاموا بمصافحة بعضهم البعض، سيكون عدد المصافحات

هو $_{100}C_2$ مرة. وكما تعرض الشاشة في الأسفل، فإن الرقمان المدخلان في المعادلة (!100و!98) أكبر بكثير من قدرة الآلة الحاسبة على التعامل معه ما يؤدي إلى نتيجة خطأ رياضي.

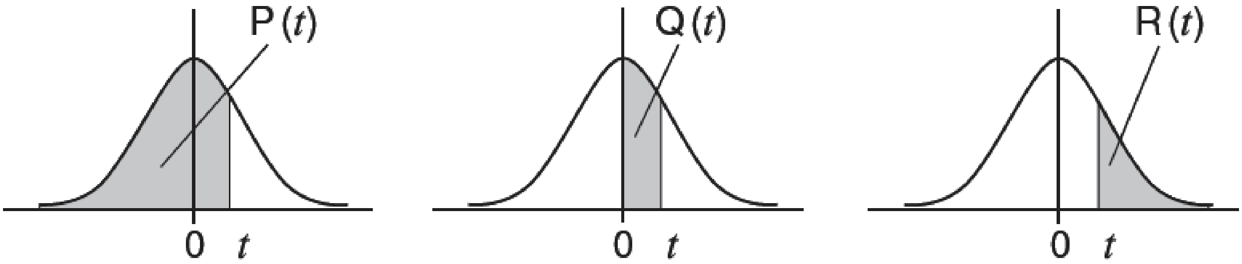


لكن في الوقت نفسه، لا تعد المهمة ذات إشكالية مع أوامر التوافيق وذلك كما نرى في الشاشة التالية.



التوزيع الاحتمالي الطبيعي

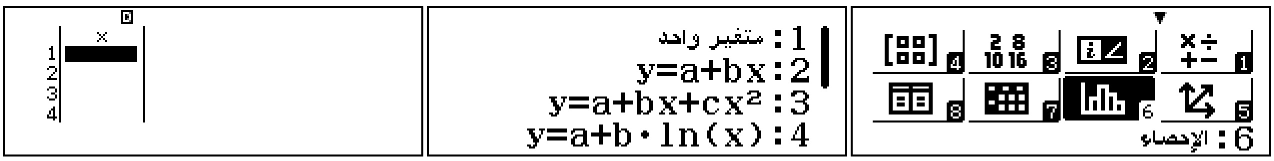
تتبع العديد من البيانات التي تحدث بشكل طبيعي *التوزيع الاحتمالي الطبيعي* والذي يملك منحنى على شكل جرس كما هو مبين أدناه. بالتالي من المفيد أن يكون لدى الآلة الحاسبة إمكانية الوصول إلى التوزيع الطبيعي القياسي (بمعنى آخر، التوزيع بمتوسط هو $\mu = 0$ وتباين هو $\sigma^2 = 1$).



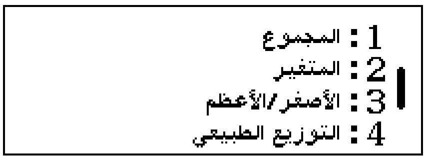
تبلغ المساحة الإجمالية تحت التوزيع الطبيعي 1، واحتمال أن يأخذ متغير عشوائي طبيعي z قيما في مجال محدد هي $P(t)$، $Q(t)$ و$R(t)$ كما هو موضح في الأعلى. هذه الثلاثة قيم تشير إلى الاحتمالات التالية:

$P(t)$ = Prob ($z \le t$) $Q(t)$ = Prob ($0 \le z \le t$) $R(t)$ = Prob ($z \ge t$)

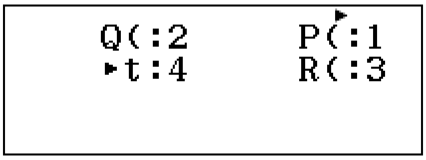
للوصول إلى أوامر التوزيع الطبيعي، تحتاج إلى تعيين الآلة الحاسبة في وضع الإحصاء متغير واحد باستخدام MENU 6 1، كما هو مبين أدناه.



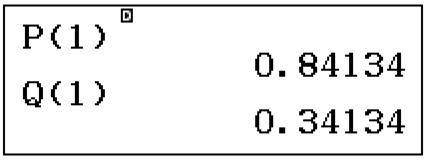
باتت الآلة الحاسبة الآن جاهزة لإدخال إحصاءات أحادية المتغير كما هو موضح بالتفصيل في الوحدة 10، لكن اهتمامنا في هذه الوحدة ليس منصبا على تحليل البيانات، إنما في استخدام التوزيع الطبيعي فقط وذلك على افتراض أننا نعرف المتوسط والانحراف المعياري للتعداد مثار الاهتمام. بالتالي انقر على AC ثم OPTN ▼ لرؤية الشاشة التالية:

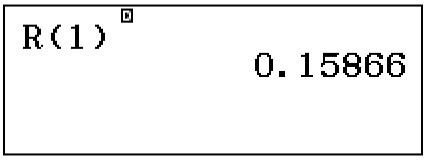


أخيرا، اضغط $\boxed{4}$ للحصول على أوامر التوزيع الطبيعي، والمبينة أدناه:

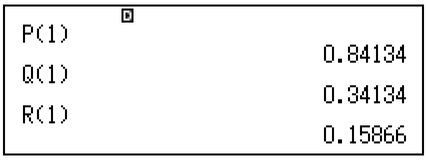


تتصل هذه الأوامر ببعضها البعض وذلك كما نرى عبر إيجاد الاحتمالات المترافقة لقيمة معينة. على سبيل المثال، انظر لقيمة $z = 1$. يقترح المخطط أعلاه أن $Q(1) = P(1) - 0.5$ و $R(1) = 1 - P(1) = 0.5 - Q(1)$. يمكنك إدخال هذه الاحتمالات كما هي مكتوبة من أجل التحقق:



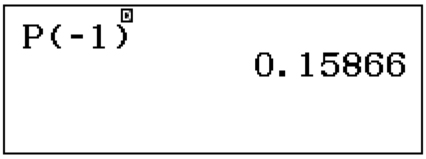


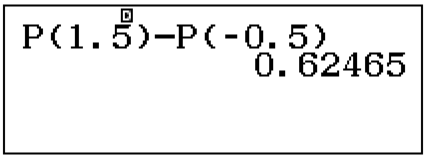
لاحظ أنك إذا كنت تفضل وضع الخط بحجم أصغر في شاشة الإعدادات SET UP، ستحتاج إلى شاشة واحدة فقط لعرض النتائج وذلك بالرغم من أن النتائج هي نفسها:



ستعكس هذه الاحتمال الثلاث المرتبطة مع $z = 1$ هذه العلاقات.

ومع كون التوزيع الطبيعي متناظر حول $z = 0$، $\text{Prob}(z \geq 1) = \text{Prob}(z \leq -1)$. تعرض الشاشة الأولى في الأسفل هذه العلاقة وأيضا توضح كلا من القيم الموجبة والسالبة لـ z والتي يمكن استخدامها، وذلك على عكس الوضع الطبيعي من أجل الجداول المطبوعة للتوزيع الطبيعي.





تعرض الشاشة الثانية احتمالات لمجال يمكن الحصول عليها بشكل مباشر. على سبيل المثال، من أجل إيجاد $\text{Prob}(-0.5 \leq z < 1.5)$، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\text{Prob}(z \leq 1.5) - \text{Prob}(z \leq -0.5) = 0.62465$.

في الممارسة العملية، لا تتوزع معظم المتغيرات مع متوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 1$ حيث يجب إجراء تحويل مناسب من أجل القيم المدرجة في الجدول التي يجري استخدامها. بشكل عام، إذا جرى توزيع متغير X بشكل طبيعي مع متوسط μ وتباين σ^2، بالتالي يكون المتغير المتحول التالي

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

هو متغير طبيعي قياسي. (في الوحدة 10، تستخدم الآلة الحاسبة t بدلا من z). يمكن حساب الاحتمالات مباشرة مع المتغيرات المحولة. ومن أجل التوضيح:

تنتج آلة كمية من صلصة الكاري والتي يجري وضعها بعلب مختومة من أجل التغليف والبيع. افترض أن الآلة معروف عنها إنتاج كميات كبيرة (بالغرام) من صلصة التي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 38.5$ وتباين $\sigma^2 = 4.8$. طبعت الشركة المنتجة للصلصة ادعاء بأن العلبة تحوي دوما 35 غرام من الصلصة.

ما هو احتمال أن تكون العلبة المختارة عشوائيا تحتوى على كمية أقل من هذه الكمية؟

إن قيمة z المرتبطة بـ $X = 35$ هي، $z = \frac{35-\mu}{\sigma} = \frac{35-38.5}{\sqrt{4.8}} \approx -1.5975$، وذلك كما هو معروض في الأسفل (في وضع الحساب):

```
P(-1.5975)
     0.055077
```

```
35-38.5
 √4.8
 -1.597524126
```

بالتالي يمكن الحصول على الاحتمال عبر استخدام هذه القيمة في نمط الإحصاء مع P(z) وذلك كما هو موضح في اليسار في الأعلى.

إن النتيجة هي حوالي 0.055 وتعني أن هناك ما يقرب من 5% من العلب المنتجة ستملك كمية صلصة أقل مما تدعيه الشركة.

من غير المريح التبديل بين نمطي الإحصاء ونمط الحساب من أجل حسابات مثل هذه. بالتالي من المفضل القيام بكل عمليات الآلة الحاسبة ضمن نمط الإحصاء وذلك كما هو موضح أدناه.

```
P(-3.5÷√(4.8))
     0.055075
```

لاحظ أنه في نمط الإحصاء، لا يعمل زر الكسور؛ بالتالي لا يُسمح بإدخال الكسور في التعبير الطبيعي، بالتالي يمكن استخدام ناتج القسمة هنا بدلا من ذلك. لاحظ أيضا أن النتيجة مختلفة قليلا عن النتيجة السابقة مع تقريب z إلى أقرب أربع منازل عشرية.

هناك حسابات احتمالية ممكنة مع المعلومات المعطاة حول آلة صنع الصلصة. على سبيل المثال، افترض إنتاج 1200 عبوة في اليوم. كم عدد العلب التي سيكون وزنها بين 36 غرام و40 غرام من الصلصة؟ كم عدد العلب التي سيكون لديها 40 غراما من صلصة؟

$$\text{Prob}\ (36 \le X \le 40) \quad = \text{Prob}\left(\frac{36-38.5}{\sqrt{4.8}} \le z \le \frac{40-38.5}{\sqrt{4.8}}\right)$$

$$\approx \text{Prob}\ (-1.14 \le z \le 0.69)$$

يمكن إدخال قيم z مباشرة عن طريق الآلة الحاسبة:

```
R(0.69)
          0.2451
Ans×1200
          294.12
```

```
P(0.69)-P(-1.14)
         0.62776
Ans×1200
         753.312
```

تعرض الشاشات في الأعلى أن الاحتمالات هي 62.8% و24.5% على التوالي. ومع إنتاج 1200 علبة يوميا، يمكن استخدام هذه النسب المئوية للتنبؤ بأنه سيكون هناك 753 علبة من أصل 1200 من المتوقع أن تكون أوزانها بين 36 و40 غرام من الصلصة، بينما هناك 294 علبة من أصل 1200 علبة سيكون لديها وزن أكبر من 40 غرام من الصلصة.

يفترض استخدام التوزيع الاحتمالي الطبيعي في هذه الوحدة أن لديك بالفعل معرفة بالمتوسط والانحراف المعياري للقضية مثار الاهتمام. تتعامل الوحدة 10 بشكل تفصيلي مع عمليات استخدام التوزيع الطبيعي عندما يكون عليك امتلاك بيانات أولية بدلا من خلاصة الإحصائيات.

العمليات الحسابية الخاصة بالتوزيع الطبيعي ذي الحدين

إضافة إلى دوال التوزيع الطبيعي المقدمة في نمط الإحصاء، تسمح لنا آلة الحاسبة *ClassWiz* باستكشاف توزيعات احتمالية رئيسية أخرى. حيث يعد التوزيع الطبيعي ذي الحدين أحد الأمثلة على ذلك.

يعتمد التوزيع ذي الحدين على عملية برنولي (ويعني هذا نتيجة هي إما 0 أو 1 مع احتمالية ثابتة) التي تكررت عدة مرات. ويجري استخدامها مع متسلسلة من أحداث برنولي مستقلة مع نتيجتين فقط حيث يجري وصف ذلك على أنه إما ربح أو خسارة. وينطوي أحد أفضل الأمثلة على هذا التوزيع رمي قطعة نقدية عدد n مرة مع احتمال ظهور الرأس p في كل مرة. حيث تكون احتمالية الحصول على العدد x الذي نريده بعد رميات مقدارها N ممثلا عادة بالشكل:

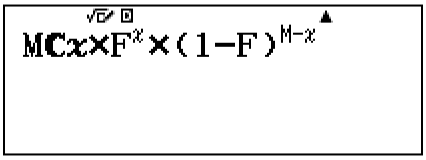
$$\text{Prob}(x) = {}_{N}C_{x} \times p^{x} \times (1-p)^{N-x}$$

يمكن إيجاد مثل هذا النوع من الاحتمالات باستخدام خاصية CALC. لكن وعلى اعتبار أن آلة ClassWiz الحاسبة لا تستخدم الرموز N و p. بالتالي سنستخدم النسخة التالية:

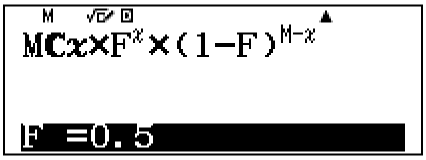
$$\text{Prob}(x) = {}_{M}C_{x} \times F^{x} \times (1-F)^{M-x}.$$

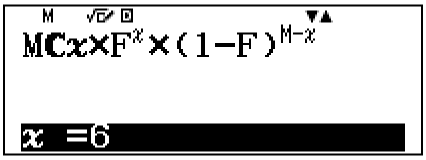
هنا يجري تمثيل العدد الإجمالي للتكرارات بالرمز M (بدلا من N) واحتمالية كل نجاح ممثلة بالرمز F (بدلا من p). [قد ترى أنه من المفيد التفكير بـ M على أنه العدد الاكبر لاحتمال النجاحات الممكنة وF على أنه تكرار النجاح طويل المدى].

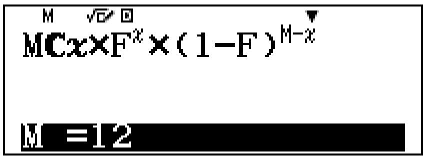
من أجل إيجاد الاحتمالات ثنائية الحد، قم أولا بإدخال الدالة في الشاشة في نمط الحساب وذلك كما هو موضح في الأسفل. ويجري الحصول على تباديل الأمر عن طريق SHIFT ÷ وسوف تحتاج لاستخدام المفتاح ALPHA من أجل توليد كلا من M و F. بعد إدخال الصيغة، انقر CALC.



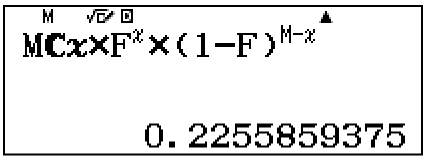
من أجل الحصول على احتمالية الحصول على x = 6 "رأس" تماما في M = 12 رمية قطعة نقدية، مع احتمالية أن يكون كل رأس F = 0.5، ادخل هذه القيم في الطلب وانقر على = بعد كل واحدة:

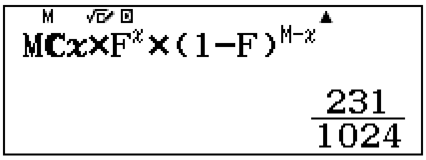






إن النتيجة معروضة ككسر في نمط الحساب، أو يمكنك تمثيلها برقم عشري عبر النقر على مفتاح S⇔D:



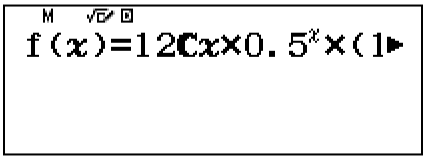


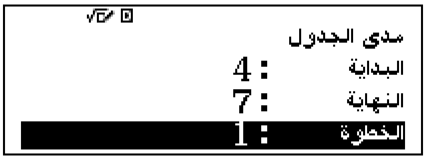
يتفاجأ بعض الناس بأن احتمال الحصول على ست مرات رأس متتالية في 12 رمية يشكل أقل من الربع حيث يظنون بأنه سيحدث بتكرار أكثر من ذلك.

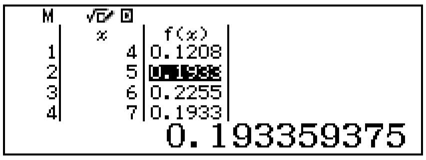
هناك العديد من الاحتمالات الأخرى (في الواقع هي 12) والتي يمكن فيها رمي 12 قطعة نقدية. انقر على CALC من جديد من أجل إيجاد احتمال آخر.

من أجل إيجاد الاحتمالات لقيم متعددة لـ x بشكل فعال، قد يكون من المفضل استخدام جدول القيم والذي يملك قيمة محددة من أجل M (عدد الرميات)، وF (احتمالية النجاح). قم بدراسة المثال التالي أدناه والذي يبين قانون احتمالية ذات حدين في نمط الجدول من أجل M = 12 وF = 0.5 . اخترنا إيجاد احتماليات 4 أو 5 أو 6 أو 7 مرات "رأس".

(لا تعرض الشاشة الأولى كامل الدالة والتي هي $f(x) = {}_{12}C_x \times 0.5^x \times (1-0.5)^{12-x}$).







يمكنك رؤية كيف أن احتمالية الحصول على 5 و 7 مرات رأس هي ذاتها تقريبا احتمالية الحصول على 6 مرات رأس حيث يبدو هذا التوزيع المحدد تقريبا متماثلا.

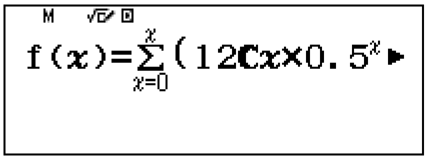
يقدم التوزيع ذي الحدين التراكمي احتمالية أن يكون عدد مرات الربح أقل أو مساوٍ للقيمة المختار لـ x. بدلا من إيجاد كل احتمالية بشكل منفصل ومن ثم إضافتها لبعضها البعض للحصول على الاحتمالية المرغوبة، الأمر الأكثر كفاءة جعل الآلة الحاسبة تستخدم جدولا من أجل القيام بالحسابات مع سلسلة أوامر، (∑▬) ، والذي يمكن الوصول إليها عبر SHIFT x . (معنى واستخدام هذا الأمر مفسر تفصيليا في الوحدة 14).

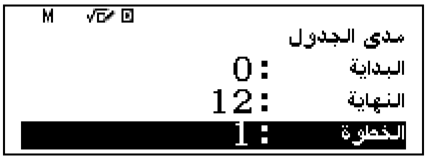
من جديد، لا تعرض الشاشة كامل القانون، لكن القانون اللازمة في هذه الحالة هو:

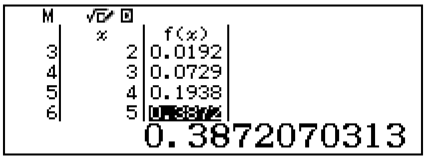
$$\sum_{x=0}^{x} {}_{12}C_x \times 0.5^x \times (1-0.5)^{12-x}$$

بعد إدخال أمر (∑▬) ، أدخل بقية القانون ثم اضغط على ▶ من أجل إدخال القيمة الأدنى، 0، ثم انقر على ▶ من جديد من أجل إدخال القيمة العليا x.

بعد إدخال بقية المجال انقر ☰، ستصبح الشاشة فارغة وستحتاج للانتظار لعدد من الثواني من أجل توليد الجدول وذلك مع حاجة الآلة الحاسبة لإستكمال 1 + 2 + 3 + ... + 13 = 91 عملية لحساب قوا1نين منفصلة من أجل تحديد قيم الجدول.

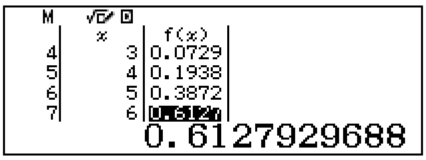


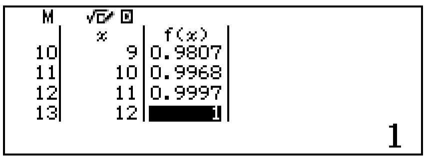




تعرض الشاشة الثالثة في الأعلى احتمالية أن رمي قطعة النقود 12 مرة، تنتج 0، 1، 2، 3، 4 أو 5 رأس هي حوالي 38.7%.

يسمح لك التنقل عبر الجدول لأسفل بالحصول على احتمالات تراكمية من أجل القيمة المتنوعة لـ x. إليك مثالين من أجل x = 6 وx = 12 .





لاحظ أنه في 61% من الوقت لن يكون هناك أكثر من 6 مرات "رأس" في 12 رمية لقطعة النقود. وكما هو متوقع، وعلى اعتبار أن العدد الإجمالي الأكبر للرؤوس التي يمكن الحصول عليها في 12 رمية هو 12، لاحظ بأن احتمالية ذي الحدين المتراكمة من أجل 12 هي 1.

حسابات توزيع بواسون

يستخدم توزيع بواسون لإيجاد احتمالية حدوث عدد من الأحداث المنفصلة في زمن معين، وذلك على اعتبار أنه من المعروف أنها تحدث ضمن معدل معين. على سبيل المثال، إذا كان هناك مكتب للمساعدة يحصل على 5 طلبات في الساعة، ما هي احتمالية أن يحصل على 3 طلبات في الساعة القادمة؟

خلافا للتوزيع ذي الحدين، والذي معاملاته (N) و (P)، يملك توزيع بواسون معامل واحدا فقط، ومعدل التغير للمجال، والممثل بالحرف اللاتيني λ (لامبدا). عندما تتبع الأحداث توزيع بواسون، فإن احتمالية حدوث x في المجال معطاة بالطريقة:

$$\text{Prob } (x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

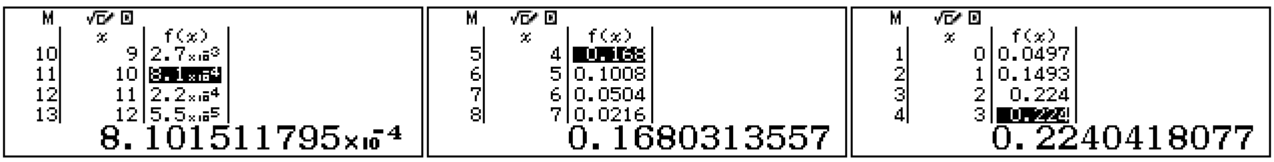
يمكنك استخدام آلة ClassWiz من أجل إيجاد احتماليات التوزيع بطريقة مشابهة للطرق الموجودة في الأعلى من أجل التوزيع ذي الحدين. وعلى اعتبار أن الآلة الحاسبة هذه لا توفر رمز "لامبدا"، سنستخدم M بدلا من ذلك، ليمثل معدل التغير في المجال، بالتالي سيكون القانون هو:

$$\text{Prob } (x) = \frac{e^{-M}M^{x}}{x!}.$$

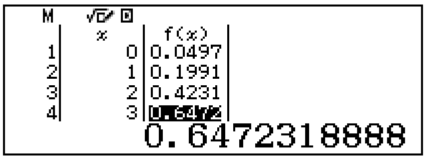
ادخل القانون في آلة classWiz في نمط الحساب ثم انقر CALC لإدخال بيانات مكتب المساعدة. تظهر الاحتمالات بأن المكتب سيحصل فقط على 3 طلبات في الساعة أي ما نسبته 14% من الوقت.

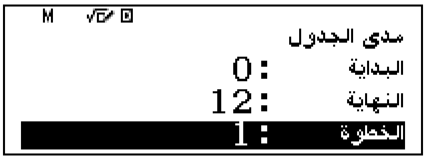
أما بالنسبة لتوزيع ذي الحدين، من المفضل أحيانا استخدام قائمة لاحتمالات بواسون بدلا من قيمة واحدة. على سبيل المثال، إذا تم توزيع الزبيب لمزيج كعكة بطريقة تحصل فيها كل كعكة صغيرة على معدل هو ثلاث قطع زبيب، قد نرغب بمعرفة ما مدى عدد مختلف الاحتمالات. في مثل هذه الحالة، سيكون معدل التغير 3 = M. لتحديد احتمالات متعددة في نفس الوقت، استخدم خيار الجدول:

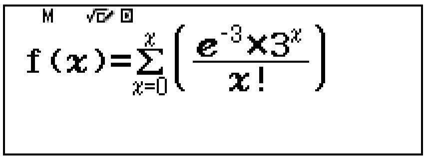
يبدو أن وجود اثنين أو ثلاثة من قطع الزبيب هي النتيجة الأكثر ترجيحا وتحدث حوالي 45% من الوقت. لاحظ أنه من غير المرجح أبدا (لكنه غير مستحيل أيضا) الحصول على 10 قطع زبيب او اكثر في الكعكة.



أما بالنسبة للتوزيع ذي الحدين، قد نهتم في بعض الأحيان في الحصول على توزيع بواسون التراكمي. على سبيل المثال، ما مدى احتمال أن تكون للكعكة أكثر من ثلاث قطع من الزبيب؟ يمكن الإجابة على مثل هذه الأسئلة مع أمر الجمع (Σ) في الجدول وذلك كما هو مبين في الأسفل. (انظر في القسم السابق من أجل نصيحة تفصيلية حول استخدام أمر الجمع).





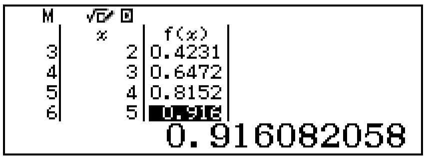


على افتراض أن توزيع بواسون مطبق هنا، تقترح هذه القيم أن الكعكة سوف تحصل ما يصل إلى (لكن دون أن تتجاوز) 3 قطع من الزبيب في 65% من الوقت.

في بعض الأحيان، يكون اهتمامنا في الاتجاه المعاكس. على سبيل المثال، لنفترض أن مصنع الكعك يريد معرفة احتمالية أن تملك كعكة ستة قطع زبيب إضافية. من أجل الإجابة على مثل هذه الأسئلة، ما يزال من الضروري استخدام توزيع بواسون التراكمي، ولكننا نحتاج في البداية لملاحظة كيف أن عدد حبات الزبيب x يجب أن يكون عددا صحيحا وأنه

$$\text{Prob } (x \geq 6) = 1 - \text{Prob } (x \leq 5).$$

يمكننا استخدام الخاصية التراكمية لتحديد $\text{Prob } (x \leq 5) \approx 0.92$ كما هو مبين أدناه.



ثم،

$$\text{Prob } (x \geq 6) = 1 - \text{Prob } (x \leq 5) \approx 1 - 0.916 = 0.084$$

يعني هذا، أن حوالي 8% فقط من الكعك تملك 6 قطع زبيب أو أكثر.

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هي مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. استخدم آلتك الحاسبة لمحاكاة عشرة أرقام عشوائية بين 0 و 1.

2. استخدم نمط الجدول لمحاكاة مجموعة مكونة من 30 عدد صحيح عشوائي بين 1 و 8.
3. جرى محاكاة مجموعة من الأرقام العشوائية في جدول باستخدام الأمر $f(x) = 100Ran\#$. صف ما نوع الأرقام التي تتوقع الحصول عليها بهذه الطريقة، ثم استخدم الآلة الحاسبة للتحقق مما إذا التنبؤ الخاص بك صحيح.

4. تتطلب لعبة "اللوتو" من اللاعبين اختيار ستة أرقام مختلفة من بين 1 إلى 45. أرادت "شذى" استخدام الآلة الحاسبة لمحاكاة مجموعة مناسبة من أرقام "اللوتو".

a) صف كيف يمكن استخدام الجدول للقيام بذلك.

b) اشرح لماذا تعد هذه استراتيجية غير ناجحة في بعض الأحيان.

5. أوجد a) !8 b) !14

6. لدينا $_7C_5 = \dfrac{7!}{5!2!}$. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد أي من التعبيرات في الأسفل، إن وجد، ليعطي إجابة صحيحة:

a) 7! ÷ 5! x 2! b) 7! ÷ (5! x 2!) c) $\dfrac{7!}{5!\times 2!}$ d) 7C5

7. هناك 22 حصانا في سباق للخيل. كم هي عدد الطرق التي يمكن فيها شغل الأماكن الثلاثة الأولى؟

8. يقوم "يسار" بصنع البيتزا حيث تتألف كل قطعة من أربع إضافات. يملك هو عشرة إضافات يمكن الاختيار من بينها. ما هي أنواع البيتزا المختلفة التي يمكن صنعها؟

9. هناك 70 طالبا في مخيم ميداني. يريد قائد المخيم اختيار خمسة طلاب لقيادة المجموعات الميدانية. ما هو عدد الطرق التي يمكنه فيها اختيار مجموعة القادة؟

10. إذا كانت z تشير إلى التوزيع الطبيعي القياسي (مع متوسط 0 وانحراف معياري 1)، استخدم الآلة الحاسبة في نمط الإحصاء لإيجاد ما يلي:

a) Prob (z < 0.74) b) Prob (z > 1.8) c) Prob (-1.5 < z < 0.6).

11. من المعروف أن أوزان دببة الكوالا في أستراليا موزعة بشكل طبيعي مع متوسط 11 كغ وانحراف معياري 1.2 كجم. ما هو احتمال أن يكون وزن دب كوالا جرى اختياره عشوائيا أكثر من 12.5 كغ؟

12. . إن متوسط أطوال الفتيات في الولايات المتحدة موزع بشكل طبيعي بمتوسط 162.6 سم وانحراف معياري 6.8 سم. إذا جرى اختيار امرأة أمريكية شابة عشوائيا، ما هو احتمال أن يكون طولها بين 158 سم و 165 سم؟

13. جرى رمي قطعة عملة 10 مرات. أوجد احتمالية

a) الحصول على ثلاث مرات "رأس" متتالية. b) الحصول على أكثر من ست مرات "رأس" متتالية.

14. مع مرور الوقت، يتلقى مركز اتصال ما معدله 4.2 مكالمة في الدقيقة. أوجد احتمال حصوله في الدقيقة التالية على: a) مكالمة واحدة فقط b) أكثر من ستة مكالمات.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. لدينا رباعي وجوه منتظم هو هرم من أربعة وجوه، كل منها هو مثلث متساوي الأضلاع حيث جرى ترقيمها بالنقاط 1 و2 و3 و4.

a) إذا تم قذف رباعي السطوح هذا عشوائيا، ما هو احتمال أن يقع على وجه 3؟

b) استخدم آلتك الحاسبة لمحاكاة 20 رمية لنردين رباعيي الأسطح ثم أوجد مجاميع الوجهين الذين وقعا عليهما. ما هو المجموع الذي سيحدث أغلب الوقت؟

c) كرر الخطوة ب) وقارن نتائجك مع محاولتك الأولى ومع محاولات طلاب آخرين.

d) ما هو الرقم الذي تتوقع أن تحصل عليه في معظم الأحيان؟

2. يعلن يانصيب "بيك 4" في الولايات المتحدة الأمريكية عن عدد من 4 خانات كل يوم؛ يفوز اللاعبون في حال اختاروا أرقاما متطابقة مع الأرقام الفائزة. افترض أنك اخترت 3297.

a) ما هو احتمال أن يتطابق رقمك مع الرقم الفائز في اليانصيب؟

b) ما هو احتمال أن يتطابق رقمك مع الرقم الفائز ضمن أي ترتيب؟

c) قم بمحاكاة لـ 30 خيارا من أرقام اليانصيب. ليكن رقمك المختار لا يزال 3297، هل ربحت؟

3. في البلد الذي تعيش فيه، أوجد توزيع أطوال الذكور والإناث البالغين. على افتراض أن الارتفاعات موزعة بشكل طبيعي

a) أوجد احتمال أن يكون طول ذكر بالغ مختار عشوائيا هو بين 165 سم و 175 سم.

b) أوجد احتمال أن يكون طول أنثى مختارة عشوائيا بين 160 و 165 سم.

c) قارن الاحتمالات في أ) و ب) مع ملاحظاتك الخاصة وكيف ترى أطوال الذكور والإناث في بلدك.

4. نسبة نجاح لاعب كرة سلة محترف في الرميات الحرة الناجحة هي 85%. إذا كان لديه ستة رميات حرة في لعبة، ما مدى احتمال أن تكون كلها ناجحة؟ ما هي النتيجة الأكثر احتمالا للنجاح؟ ما عدد المرات التي سيتحقق فيها أربع رميات ناجحة وأكثر؟ ابحث عما يحدث في حال جرى رمي رميات أكثر أو تغير معدل النجاح.

5. قام ست أصدقاء بمقارنة أبراجهن الناتجة عن تواريخ ميلادهم (يوجد عادة 12 برج موزعين على مدار العام). ما مدى احتمال أن يكون لاثنين من الأصدقاء على الأقل نفس البرج؟ استخدام جدولا على الآلة الحاسبة لمحاكاة الأبراج؛ قم بذلك عدة مرات وقارن النتائج مع أشخاص آخرين لترى عن كثب مدى تطابق هذه التوقعات. ماذا سيحدث لو احتوت المجموعة على مزيد من الأصدقاء؟

6. هناك تقاطع في مدينة رئيسية معروف عنه أن يعاني من الكثير من الحوادث حيث معدل الحوادث التي تجري فيه هي 2.9 حادث اصطدام شهريا. وفي شهر واحد، حصلت خمس حوادث اصطدام؛ ما مدى احتمالية حدوث مثل هذه الحادثة سنويا عن طريق الصدفة؟

تحقق من الآثار المترتبة على معدل الاصطدام هذا. على سبيل المثال، هل تتوقع أن يمر شهر بدون حوادث خلال السنة؟ ما هو أكثر عدد لحالات للاصطدام في الشهر؟ ما الذي ستكون عليه عواقب معدل التصادم في حال انخفضت إلى 2.5 حادث شهريا أو ارتفعت إلى 3.5 حادث؟

ملاحظات من أجل المعلمين

سلطت هذه الوحدة الضوء على الطريقة التي يمكن فيها لهذه الآلة الحاسبة مساعدة الطلاب على تعلم العشوائية، والاحتمالات والعد المنهجي، إضافة إلى استخدام الآلة الحاسبة من أجل توليد بيانات عشوائية والتوزيعات الاحتمالية الرئيسية. كما جرى استخدام نمطي الإحصاء والتوزيعات. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف الاحتمالات بطرق مختلفة. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

إجابات التمارين

1. استخدم (SHIFT •) Ran# ثم انقر = عشر مرات

2. f(x) = RanInt(1,8)، البداية = 1، النهاية = 30، الخطوة = 1.

3. ستبدأ الأعداد بعدد من 0 إلى 99.

4. استخدم f(x) = RanInt(1,45)، البداية = 1، النهاية = 6، الخطوة = 1.   b) في بعض الأحيان سوف تتكرر اثنان من الأعداد الصحيحة الستة.

5. a) 40,320   b) 87,178,291,200

6. a) 84   b) –   d) 21 (والذي هو صحيح).

7. $_{22}P_3 = 9240$

8. $_{10}C_4 = 210$

9. $_{70}C_5 = 12,103,014$

10. a) $P(0.74) \approx 0.770$ b) $R(1.8) \approx 0.036$ c) $P(0.6) - P(-1.5) \approx 0.659$

11. 0.106   12. 0.389   13. a) 0.117   b) $1 - 0.828 = 0.172$

14. a) 6.3%   b) $1 - 0.867 = 0.133$

نشاطات

1. ينبغي على الطلاب استخدام آلاتهم الحاسبة لتوليد البيانات عشوائيا باستخدام (1,4) *RanInt*، وتسجيل هذه القيم في جدول على ورقة. شجعهم على تكرار التمرين على الأقل مرة ومقارنة النتائج مع الآخرين وذلك بهدف رؤية كيفية حدوث التباينات العشوائية. [الإجابات: a) ¼ d) النتيجة الأكثر احتمالا لإضافة زوج هي 5؛ هذا سوف يحدث في معظم الأحيان، ولكن سوف تكون هناك حاجة للعديد من مجموعات 20 رمية].

2. يتطلب القسمين الأول والثاني بعض التحليل للوضع والذي يمكن القيام به من قبل كامل الصف في حال كانت الأفكار غير مألوفة للطلاب. إن المحاكاة التي من المرجح حدوثها من أجل إنتاج "فائز" مع وجود تطابق تام هي فقط 1/10000 وفي حال جرى تجاهل الترتيب فهي 24/10000. يمكن أن تساعد هذه التجربة الطلاب على الفرص القليلة للفوز في مباريات من هذا النوع أو على الأقل مساعدتهم على بدء تحليلها واستخدام الآلة الحاسبة لمحاكاة النتائج.

3. يسمح هذا النشاط للطلاب باستكشاف الوضع الحقيقي باستخدام آلتهم الحاسبة. ويمكن الاطلاع على بيانات بأطوال بالغين ضمن مصادر مختلفة على شبكة الإنترنت، (مصادر رسمية أو في :Wikepedia http://en.wikipedia.org/wiki/Human_height#Average_height_around_the_world). قد تحتاج إلى تقدير البيانات الخاصة باختلاف الأطوال حيث هناك تباين يصل إلى حوالي 7.5 كل من الذكور والإناث. [الإجابات: تختلف النتائج من بلد إلى آخر. في أستراليا، متوسط طول الذكور 178.4 سم والإناث 163.4 سم؛ والاحتمالات الناتجة ستكون 29٪ و26٪ على التوالي، مما يشير إلى أن حوالي ربع أطوال البالغين ستنتمي إلى تلك النطاقات].

4. يساهم هذا النشاط في جعل الطلاب يستخدمون التوزيع ذي الحدين مع N و $p = 0.85$ ، وربما يثير النقاش حول الإفراط في تفسير سلات النجاح أو الفشل المتتالية للاعبين. شجع الطلاب على تجربة احتمالات أخرى، أو وضع نموذج لأداء اللاعبين المحليين الحقيقي (إذا كانت البيانات المتاحة). [الإجابات: 0.38 و 5 و 0.22].

5. هذا هو الاختلاف على مشكلة عيد الميلاد الكلاسيكية. على افتراض أن لدينا 12 برج، بالتالي يمكن محاكاتها باستخدام الأمر (1,12)*RanInt*. سيقوم جدول بستة مدخلات بمحاكاة العملية على نحو فعال. شجع الطلاب على إجراء عدة عمليات محاكاة وتسجيل ومقارنة النتائج. [الجواب: سوف يكشف التحليل عن أن احتمال تطابق واحد على الأقل هي 1343/1728 ≈ 78٪، بالتالي سوف تعكس بيانات المحاكاة هذا. في حال كانت المجموعة أكبر، ستزيد احتمالية التطابق].

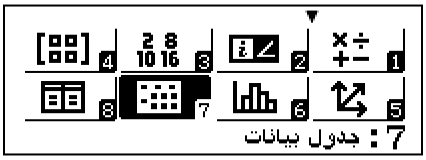
6. يتضمن هذا النشاط قيام الطلاب باستخدام توزيع بواسون مع $M = \lambda = 2.9$. شجعهم على تجربة معدلات أخرى أو حتى للتحقق من البيانات المتعلقة بتقاطعات محلية. [الإجابات: Prob = 0.094، بالتالي ليس أكثر من شهر واحد في السنة؛ Prob = 0.055، بالتالي توقع عدم وجود حوادث في شهر كل عامين. هناك احتمال حدوث 3 حوادث شهريا ولكن 2 هو مرجح بشكل أكبر].

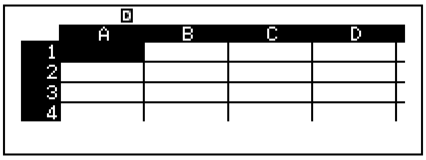
الوحدة 13
النمذجة باستخدام جداول البيانات

سنقوم في هذه الوحدة باستكشاف جداول البيانات الخاصة بالآلة الحاسبة ClassWiz، أولا من أجل فهم كيف تعمل وكيف يمكن استخدامها لأغراض رياضية مختلفة. ثم سننظر في بعض الأمثلة عن مواضيع رياضية يمكن التعامل معها بشكل جيد باستخدام جداول البيانات.

مقدمة

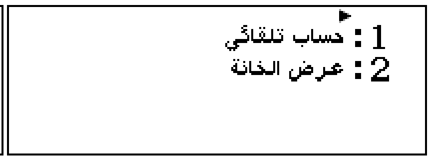
يتألف جدول البيانات ضمن الآلة الحاسبة ClassWiz من مصفوفة مستطيلة مؤلفة من 225 خلية، موزعة على 5 أعمدة (من A إلى E) و 45 صف مرقمة عدديا. يمكن الدخول لقسم الجداول الممتدة عبر الضغط على زر MENU 8 (جدول بيانات) من أجل رؤية جدول بيانات فارغ كما هو مبين أدناه. عندما تدخل في نمط جدول بيانات، سيتم مسح أي معلومات سابقة فيه (وهو من المهم تذكره عند استخدام هذا الخيار على اعتبار أن تغييره سيجعلك تفقد جميع المعلومات).

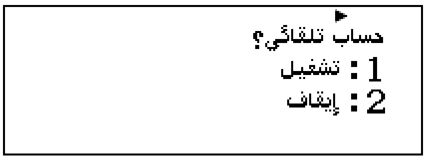


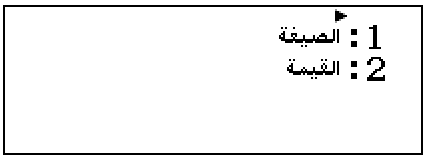


تملك كل خلية *عنوان*، مثل الإشارة للنقاط على الخريطة، يتألف من حرف ورقم (الحرف أولا ثم الرقم). في جدول البيانات الفارغ في الأعلى، فإن الخلية المظللة هي A1. يمكنك الانتقال إلى الخلايا الأخرى باستخدام مفاتيح المؤشر الأربعة (◀ ▶ ▲ ▼). فكر بكل خلية على أنها صندوق يحوي عدد، يمثل قيمته العددية. عند البدء، لا تملك كل الخلايا أي قيم، ولكن يمكن تغيير محتويات أي خلية عن طريق تحريك المؤشر إلى الخلية ثم إدخال عددمتبوعا بزر =. لتغيير محتويات خلية، حرك المؤشر للخلية وادخل قيمة جديدة (والتي سوف تحل محل أي قيمة موجودة). لمسح محتويات خلية، اذهب للخلية التي تريد باستخدام مفاتيح المؤشر ثم اضغط على DEL.

هناك بندان في شاشة الإعدادات SET UP من أجل جداول البيانات (يمكن الوصول إليها من خيار 4: جدول بيانات) في الصفحة الثانية من شاشة الإعدادات SET UP كما نرى أدناه. والآن، اختر حساب تلقائي، 1: تشغيل وعرض الخانة 1: الصيغة.

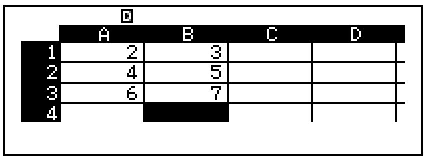






العمليات الحسابية الأساسية

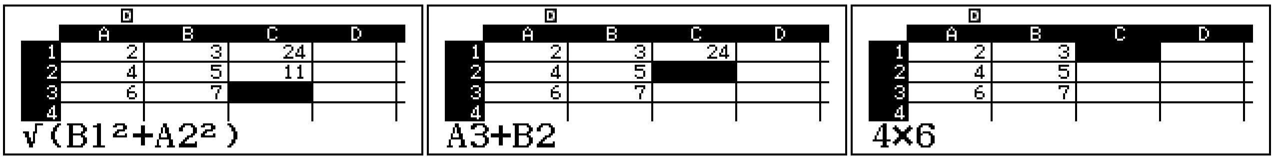
تُستخدم جداول البيانات لإجراء العمليات الحسابية. لرؤية كيفية القيام بذلك، أدخل القيم المعطاة في الأسفل ضمن جدول بيانات جديد. لاحظ أنه عندما تنقر على =، سيتحرك المؤشر صفا واحدا للأسفل، بالتالي يكون من السهل عليك إدخال البيانات في الأعمدة.



يمكن إدخال قيمة خلية عبر عملية حسابية مباشرة. كمثال على ذلك، حرك المؤشر إلى C1 وأدخل 4 × 6، تليها ⊟. إذا قمت بخطأ ما، يمكنك تعديل الإدخال قبل الضغط على ⊟. سيتم وضع النتيجة 24 في C1.

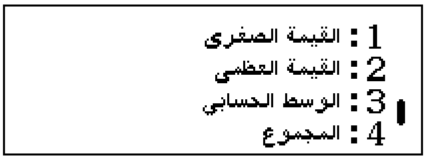
يمكنك حساب قيمة خلية من قيم الخلايا الأخرى. على سبيل المثال، مع وجود المؤشر في C2، ادخل القيمة A3 + B2 ثم ⊟ وذلك كما هو مبين في الشاشة الثانية أدناه. استخدام ALPHA (−) و ALPHA °′″ على التوالي من أجل الحصول على قيم A و B وذلك كما هي الطريقة التي قمت بها مع الذاكرات. ستكون النتيجة هي جمع قيمة A3 (وهي 6) و B2 (وهي 5) لتعطي 11 في الخلية C2.

يمكن إجراء عمليات حسابية أكثير تعقيدا أيضا. على سبيل المثال، تعرض الشاشة الثالثة أدناه، مثلا، النتيجة 5 في الخلية C3.

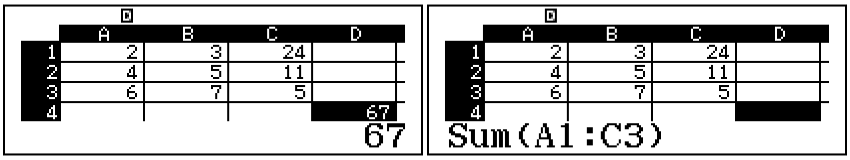


انقل المؤشر إلى D4 للخطوة التالية.

تتضمن الآلة الحاسبة ClassWiz بعض العمليات الحسابية المفيدة من أجل مجموعة من الخلايا وذلك كما هو مبين أدناه. تظهر هذه القائمة في الشاشة الرابعة من قائمة OPTN. انقر على OPTN ثم ▼ ثلاث مرات للوصول إليها. (في الواقع، يمكنك أيضا النقر على OPTN ثم ▲ مرتين لتحقيق نفس النتيجة).

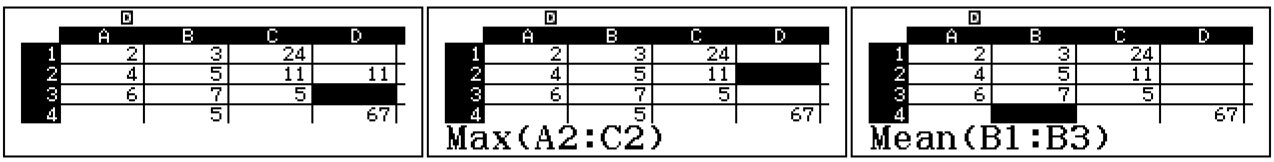


توضح أسماء هذه الأوامر هدفها، لتحديد المجموعة المرغوبة، ستحتاج إلى الإشارة إلى الخلية الأولى والأخيرة مفصول بينهما بنقطتين (يمكن الوصول لها بالضغط على ALPHA ∫□ على لوحة المفاتيح). وهكذا، على سبيل المثال، سيقوم الأمر Sum(A1: C3) سيقوم بحساب مجموع جميع الخلايا الواقعة في الخلايا التسعة والتي تشكل مستطيلا ركنه الأول A1 وركنه المقابل C3 (ما يحدد لنا 9 خلايا). لإدخال هذا الأمر في الخلية D4، وبمجرد أن يصبح المؤشر في الخلية، ابدأ مع خيار Sum (رقم 4) ثم قم بإكمال الأمر وانقر على ⊟ وذلك كما هو مبين أدناه. (ستحتاج لتحريك المؤشر لرؤية الشاشة تماما كما في الأسفل).



لإيجاد متوسط أو قيمة المعدل في العمود B، ادخل الأمر Mean(B1: B3) في الخلية B4.

للعثور على القيمة العظمى في الصف الثاني، أدخل الأمر Max(A2: C2) في الخلية D2، حيث يجري عرض هذه العمليات الحسابية في الشاشة أدناه.

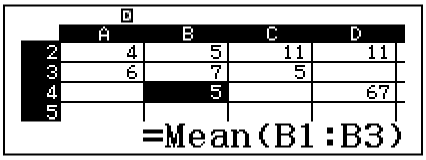


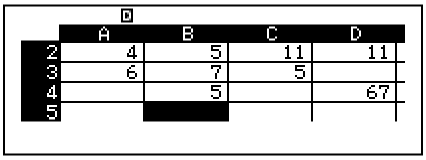
يمكنك التحقق بنفسك صحة هذه الحسابات.

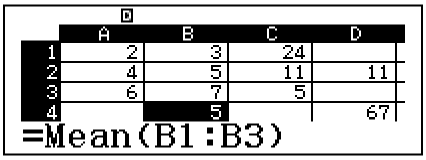
استخدام الصيغ الرياضية

تنشأ قوة جداول البيانات من استخدام *صيغ رياضية* لإجراء العمليات الحسابية وليس العمليات الحسابية نفسها. كما هو الحال في الرياضيات، إن الصيغة الرياضية هي تعليمات لضم عدة متغيرات مع بعضها البعض بطريقة محددة. في حالة جداول البيانات، ينظر لمحتوى كل خلية على أنه متغير.

تبدأ الصيغة في جدول البيانات في الآلة ClassWiz بعلامة المساواة (المتحصل عليها باستخدام ALPHA CALC وليس علامة = العادية). لرؤية كيفية عمل هذا، ادخل الصيغة من أجل متوسط العمود B في B4، ولكن في هذه الحالة ضع علامة المساواة في البداية كما هو موضح في الشاشة الأولى أدناه.



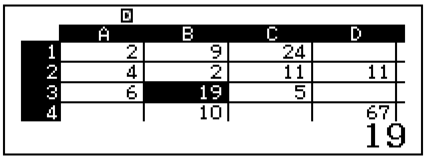




عند نقرك على = لإنهاء إدخال الصيغة، يتم استبدال قيمة الخلية السابقة (وهي 5) بنتيجة الصيغة الجديدة (والتي هي 5)، بالتالي يظهر أمامك وكأنه لم يحدث أي تغيير. ومع ذلك، إذا قمت بنقل المؤشر للخلية B4 مرة أخرى، ستلاحظ أن النتيجة في الجزء السفلي من الشاشة تبين أن الخلية تحتوي على صيغة. وتعرض الشاشة الثالثة هذا.

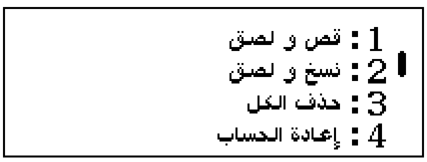
تحتوي الخلية B4 على صيغة، تملك قيمة. يجري عرض القيمة دائما في جدول البيانات نفسه. ولأننا قمنا في شاشة الإعدادات SET UP بإعداد الخيار لإظهار الصيغ في جداول البيانات وذلك عبر خيار عرض الصيغة، يكون من الواضح كلما كان المؤشر في الخلية. (الصيغ ستكون غير مرئية، لكنها ما تزال هناك، في حال جرى وضع الخيار عرض القيمة في شاشة الإعدادات).

خلافا لعملية الحساب الأصلية الخاصة بحساب المتوسط، ستقوم الدالة بحساب المتوسط كلما جرى تغيير أي قيمة من القيم الداخلة في الصيغة ضمن جدول البيانات. ومن أجل معرفة كيفية عمل هذا، قم بتغيير القيم في B1، B2 وB3 ولاحظ كيف أن المتوسط يجري إعادة حسابه تلقائيا في كل مرة يتم فيها إدخال قيمة جديدة. يوضح المثال التالي هذا.



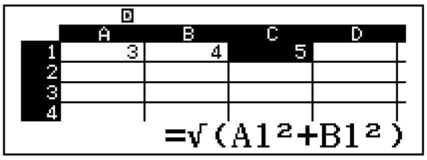
لقد تغير المتوسط في B4 مع التغييرات التي حصلت في الخلايا B1، B2 وB3. لاحظ أن الحسابات السابقة في D2 وD4 لم تتغير (لأنها لا تتضمن صيغ في جدول البيانات).

إذا لم تتغير قيمة المتوسط تلقائيا في جدول البيانات، ستحتاج للتحقق من أن خيار حساب تلقائي موضوع على تشغيل في شاشة الإعدادات SET UP وذلك كما وضحنا سابقا. في حال كانت موضوعة على إيقاف، ما يزال بإمكانك إعادة حساب القيم يدويا عبر خيار 4: إعادة الحساب في شاشة OPTN الثانية كما هو مبين أدناه.



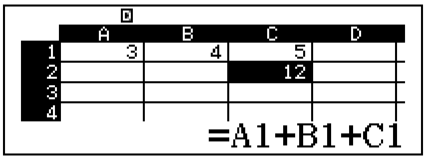
لا تقتصر الصيغ على العمليات الحسابية الأربعة المتوفرة في قائمة OPTN. حيث يعتبر أي أمر يحوي خلايا في جداول البيانات مع إشارة = هو صيغة. للنظر في مثال سهل. ابدأ بحذف كل مدخلات الجداول البيانية عن طريق OPTN ▼ 3: حذف الكل وذلك كما هو مبين أعلاه.

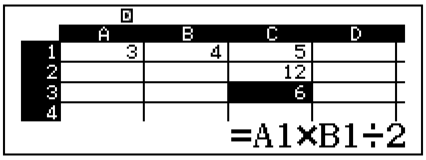
يملك الجدول البياني في الأدنى أطوال الضلعين القصيرين من مثلث (A1 وB1)، وصيغة في الخلية C2 للعثور على طول وتر المثلث، وذلك باستخدام نظرية فيثاغورس.

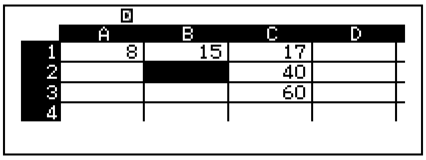


قم بإنشاء هذه البيانات وجربها. كلما قمت بتغيير القيم في A1 أو B1، سيجري احتساب وتر جديد في C1. (ويشابه هذا الأمر CALC الموصوف في الوحدة 3).

ويمكن أن يشمل الجدول عدة صيغ بطبيعة الحال. على سبيل المثال، قد يتضمن جدول البيانات الخاص بالمثلثات القائمة صيغة من أجل معرفة محيط ومساحة المثلث، بصيغ منفصلة في C2 و C3 لهذا الغرض، كما هو مبين أدناه.





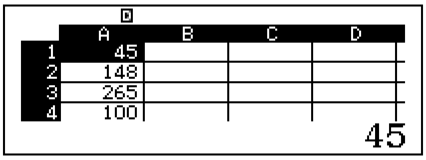


حاول استخدام هذه البيانات بنفسك حيث سترى كيف أن أي تغييرات في أطوال الضلعين في A1 أو B1 يؤدي لتغيير كل القيم الثلاثة في العمود C. ونرى ذلك في الشاشة الثالثة أعلاه.

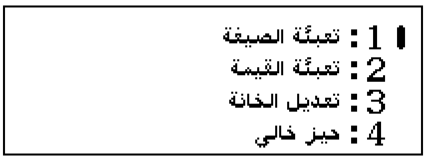
أوامر التعبئة

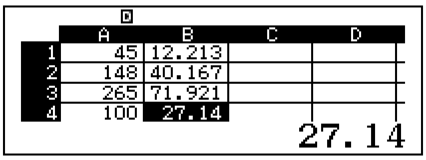
بينما توفر الصيغ قوة وبراعة لجداول البيانات، يتضمن أفضل استخدام لها التعامل مع مجموعة من الخلايا دفعة واحدة ومن ضمن ذلك إدخال البيانات تلقائيا في خلايا جديدة وذلك باستخدام أمر مثل أمر تعبئة.
هناك نوعان من أوامر التعبئة في الآلة الحاسبة ClassWiz، وذلك اعتمادا على نوع القيم المدخلة في مجال الخلايا وإذا ما كانت قيما عددية أو صيغة رياضية.

لمشاهدة مثال على هذا، سوف نكون جدول بيانات من أجل التحويل بين العملات. احذف محتويات الجدول السابق لبدء جدول بيانات جديد، مع قيامك بتخزين بعض القيم العشرية (بعملة بلدك) في الصفوف الستة الأولى من العمود A. ويعرض الجدول أدناه بعض القيم بعملة رنجيت الماليزية.



لتحويل رينجت ماليزي إلى دولار أمريكي، من الضروري ضربه بسعر الصرف والذي هو 0.2714. بالتالي نحن بحاجة لضرب كل القيم في جدول البيانات بـ 0.2714. سيجري تخزين النتائج مقابل القيم السابقة ضمن العمود B. سيقوم أمر 2: تعبئة القيمة بهذه المهمة بأمر واحد فقط كما هو مبين في الأسفل. مع نقل المؤشر إلى الخلية B1، اضغط OPTN للوصول لخيارات جداول البيانات ثم اختر 2: تعبئة القيمة للوصول إلى الأمر المبين أدناه. يتألف الأمر من جزأين: الصيغة المستخدمة، ومجموعة الخلايا التي ينطبق عليها.

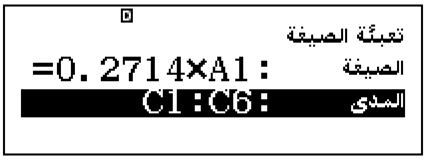


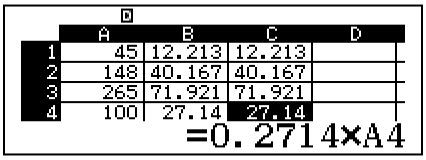


ادخل الصيغة أولا (متبوعة بزر ⊜). ضمن في الصيغة الخلية الأولى من نطاق الخلايا (في هذه الحالة من A1 إلى A6). استخدم المؤشرين ◀ و ▶ ومفتاح DEL لتحرير النطاق من أجل إنهاء القيمة النهائية (في هذه الحالة، B6)، ثم انقر ⊜. انقر ⊜ من جديد لتنفيذ أمر التعبئة بحيث سيتم تطبيق الصيغة على الفور *لكل* عنصر من العناصر من A1 إلى A6 وسيتم تخزين النتائج في الخلايا من B1 إلى B6، كما هو مبين أعلاه.

تحقق مع المؤشر من أن جميع الخلايا الست في العمود B قد اكتملت. إن التحويل من 100 رينجت إلى 27،14 دولار هو صحيح بشكل واضح، يقترح التحقق الذهني أن باقي القيم صحيحة أيضا.

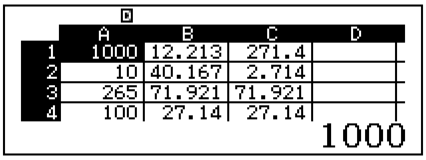
أما النوع الثاني من أمر التعبئة، فيمكن الوصول إليه من زر OPTN 1 : تعبئة الصيغة والذي يقوم بإدراج الصيغة وقيمة في كل خلية. قد يبدو نفس الأمر السابق كما تعرض الشاشات في الأدنى حيث الأمر الذي جرى إدخاله في الخلية C1 والنتائج المخزنة في الخلايا C1 إلى C6. ولكن لاحظ بأن خط الصيغة بات يتضمن إشارة يساوي (مقدم تلقائيا من قبل ClassWiz)





تبدو القيم مماثلة لتلك الموجودة في العمود B. تحقق بالمؤشر من أن جميع الخلايا الستة في العمود C قد اكتملت. لاحظ أنه بينما تقوم بتحريك المؤشر للأسفل، ستجد أن *كل خلية الآن تحوي صيغة مختلفة ولكنها* الصيغة *المناسبة* للخط المعني.

كما رأيت في القسم السابق، سيتم تطبيق الصيغة من جديد مع أي تغيير في القيمة. لرؤية هذا، قم بتغيير بعض القيم في العمود A ولاحظ كيف جرى الحصول على قيم جديدة في العمود C (لكن ليس العمود B، الذي يحتوي على قيم فقط لا صيغ). تعرض الشاشة أدناه مثالين في الصفين 1 و 2. لم تتغير القيم في العمود B مع تغيير القيم في العمود A.



لاحظ أنه كان بإمكانك إدخال ست دوال في وقت واحد في العمود C وذلك باستخدام علامة يساوي لكل منهما، لكن استخدام أمر تعبئة الصيغة يعد أكثر كفاءة بكثير.

العنوان النسبي والمطلق

في المثال الأخير، قام جدول البيانات بعملية توليد تلقائي للصيغة الصحيحة وذلك لكل خلية من خلايا المجال. من أجل القيام بذلك، قارنت الآلة مواقع الخلية في الصيغة (A1) مع الخلية الأولى في المجال (B1): سنرى أن A1 هي إلى اليسار تماما من B1. تنطبق نفس القاعدة على كل صف من المجال بدوره:

A2 إلى اليسار تماما من B2

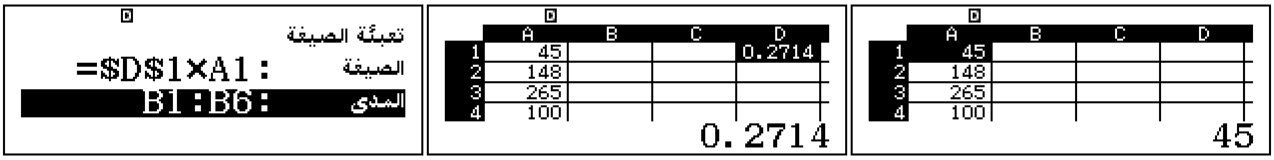
A3 إلى اليسار تماما من C2

وهلم جرا...

يدعى هذا الأمر العنوان *النسبي* (Relative Addressing)، حيث ترتبط عناوين الخلايا ببعضها البعض بنفس الطريقة. تعمل الصيغ عادة بهذه الطريقة في جدول البيانات.

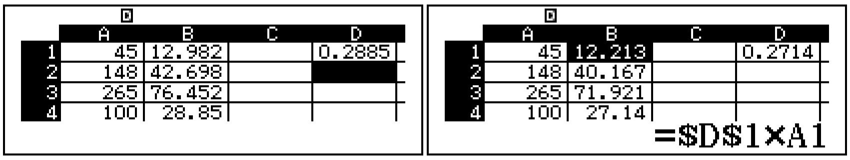
أحيانا يكون من الضروري استخدام العنوان *المطلق* (Absolute Addressing) في الصيغة، بحيث يشار إلى الخلية نفسها في كل مرة. دعونا ننظر إلى مثال التحويل بين العملات مع البدء من جديد بجدول البيانات

الأصلي (كما هو موضح في اليمين أدناه). قم الآن بإضافة معدل التحويل 0.2714 إلى الخلية D1، كما هو مبين في الشاشة الوسطى.



بعد ذلك، استخدم أمر تعبئة الصيغة في الخلية B1 للقيام بهذه التحويلات في العمود B. هذه المرة، بدلا من استخدام القيمة 0.2714 في الصيغة، سوف نشير للخلية D1 من أجل كل صف. لإظهار كيف يجري استخدام نفس الخلية لأجل كل صف، يتم كتابة اسم الخلية مع وجود علامات الدولار بالشكل $D$1. كما هو مبين في الشاشة اليمنى أعلاه. يتوفر رمز $ عبر OPTN 1.

عند تنفيذ هذه الصيغة، ستعطي النتيجة نفس القيم كما كان الحال من قبل، إلا أن الدالة في كل خلية في العمود B ستكون مختلفة عن السابق. قارن الشاشة الأولى أدناه مع تلك السابقة:



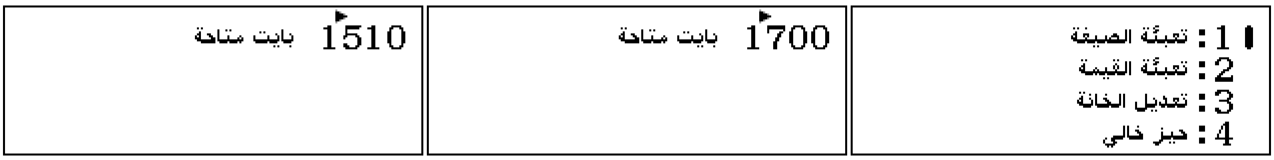
تستخدم كل صيغة الآن كلا من العنوان *المطلق* (على سبيل المثال، $D$1) والعنوان *النسبي* (على سبيل المثال A1)

ولكن الآن، إذا تغير سعر الصرف، وأصبح – لنقل – 0.2885، بالتالي كل ما علينا القيام به هو تغيير القيمة فقط في الخلية D1، وسوف تجري جميع التحويلات تلقائيا بالقيمة الجديدة كما هو مبين في الشاشة الثانية أعلاه. يعود السبب في ذلك إلى أن الصيغ تستخدم العنوان *المطلق* من أجل D1. تحقق بنفسك من أن التحويلات الجديدة صحيحة. إحدى الطرق للقيام بذلك هي عبر تغيير بعض القيم في العمود A.

في هذه الحالة، يكون جدول البيانات أكثر كفاءة عبر عملية العنوان *المطلق*.

الذاكرة

تخصص الآلة الحاسبة ClassWiz كمية معينة من الذاكرة (1700 بايت) لجداول البيانات، ولن تسمح لك بتجاوزها. تأخذ كل خلية 10 بايت من الذاكرة، بالتالي فإن الحد الأقصى لعدد الخلايا التي يمكنك التعامل معها هو 170 خلية (من أصل 225). تتطلب الصيغ بدورها ذاكرة إضافية بحسب محتواها (لاحظ أن الخلية التي فيها صيغة تكون محتوية على قيم رقمية و صيغة في آن واحد). تعرض الشاشة الثالثة في الأسفل المساحة الحرة الحالية لجدول البيانات المستخدم؛ في هذه الحالة، هناك سبع خلايا تحوي أرقاما (بحجم 10 بايت لكل خلية)، وستة خلايا تحوي صيغا وأرقاما (بحجم 19 بايت لكل منها) وهو ما يجعل المجموع 184 بايت. (ليس من الضروري بالنسبة لك القيام بهذه الحسابات).



إذا جرى استخدام أمر تعبئة القيمة، سيجري استهلاك ذاكرة أقل من أمر تعبئة الصيغة وذلك بالرغم من أنه أقل قوة كما رأيت سابقا.

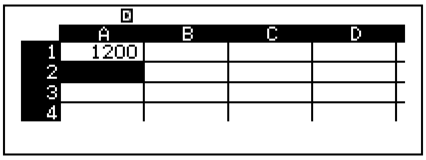
نقترح عليك التحقق من مساحة الذاكرة الحرة (باستخدام OPTN 4) بشكل منتظم، وخاصة إذا كنت تعتزم إنشاء جدول كبير وذلك بهدف استخدام الذاكرة المتوفرة بحكمة. على سبيل المثال، في بعض الحالات،

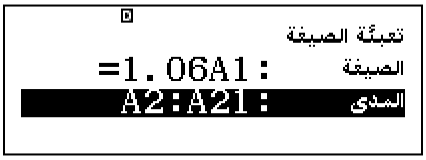
يمكن إنقاص عدد الصفوف في جدول البيانات دون التسبب في مشكلة في الذاكرة وبالتالي توفير جزء من الذاكرة. انقر على OPTN أو AC للعودة إلى جدول البيانات بعد التحقق.

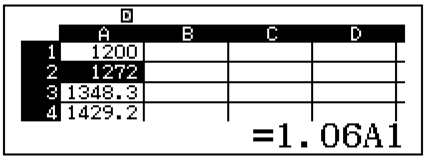
النمذجة المالية

غالبا ما تُستخدم جداول البيانات لأغراض النمذجة المالية لكونها تسمح بدراسة ترتيبات مالية مختلفة.

على سبيل المثال، انظر في حالة الفائدة المركبة. افترض وجود مبلغ من المال، لنقل 1200$، مودع في حساب مصرفي بفائدة مركبة سنوية هي 6%. أنشئ جدولا جديدا وأدخل الإيداع الأولي في A1.

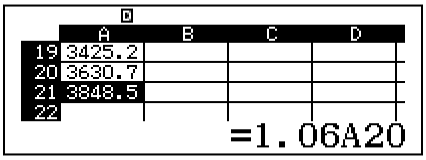




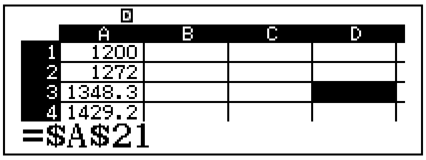


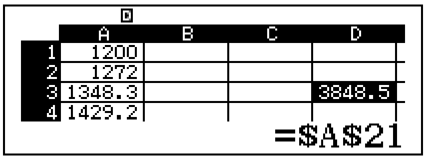
وعقب فائدة تبلغ 6%، والتي يتم الاحتفاظ بها في الحساب، فإن المبلغ في الحساب يزداد سنويا بنسبة 6%. استخدام أمر تعبئة الصيغة لتخزين الرصيد السنوي للعشرين عاما المقبلة وذلك كما هو موضح أعلاه. كل صف من الجدول يمثل سنة.

انتقل لأسفل عمود الإدخالات لرؤية كيف أن الوديعة ستنمو لأكثر من 3848$ خلال فترة 20 عاما (أي في السنة الـ 21).

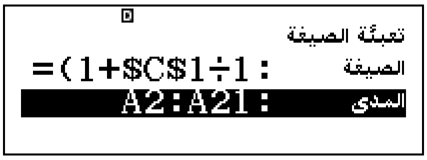


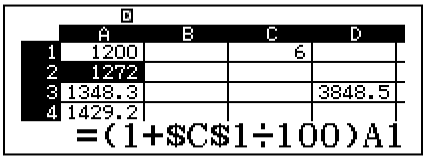
يمكن تحسين هذه البيانات بعدة طرق. على سبيل المثال، لتجنب الحاجة للتمرير لأسفل إلى الخلية A21 في الجزء السفلي، يمكنك نسخ النتيجة (باستخدام صيغة مع العنوان المطلق) إلى صفحة جديدة في الجدول (في الخلية D3 مثلا) وذلك كما هو موضح أدناه. يسهل هذا الأمر عملية استخدام جداول البيانات.



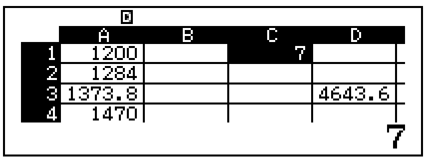


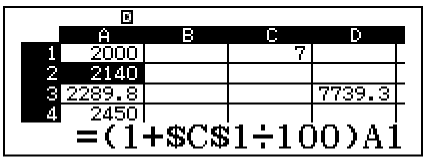
هناك تحسين آخر يكمن في جعل الجدول أكثر مرونة. أي بدلا من معدل الفائدة المركبة البالغ 6% سنويا، يمكن الحصول على جدول بيانات يسمح بنمذجة تأثيرات معدلات فائدة مختلفة مع تغييرها حسب الحاجة. في النسخة أدناه، فإن معدل الفائدة (مئويا) مكتوب في الخلية C1، وقد جرى تعديل أمر تعبئة الصيغة لاستخدام ذاك المعدل عبر استخدام العنوان المطلق، كما هو موضح في الأسفل. لاحظ أن الصيغة بأكملها غير مرئية في الشاشة الأولى لكن يمكن رؤيتها في الشاشة الثانية.





الآن، لنمذجة آثار التغير في سعر الفائدة من 6% إلى 7% سنويا، كل ما هو مطلوب هو تغيير C1 إلى 7. بالتالي سيتغير المجموع العام بعد عشرين عاما ويغدو 4643$:

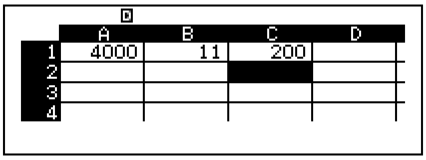




وبالمثل، لتغيير مبلغ الوديعة من 1200$ إلى 2000$، قم فقط بتغيير المبلغ في A1 حيث تعرض الشاشة الثانية أعلاه كيف أن الحساب سوف يحمل مبلغا يصل إلى 7739$ بعد 20 عاما.

تسمح جداول بيانات مماثلة بنمذجة أوضاع مالية أخرى مثل سداد قرض. على سبيل المثال، لنفترض أن القرض يتم سداده على دفعات شهرية منتظمة وأن هناك نسبة فائدة شهرية على المبلغ الغير مسدد. كم من الوقت سيستغرق سداد القرض؟ ما هو تأثير تغيير الأقساط؟ ما هو تأثير اختيار قرض مع معدل فائدة مختلف؟

أنشئ جدول جديد وأدخل مبلغ القرض في A1. أدخل معدل الفائدة السنوية (ليجري تأويلها بشكل مئوي) في B1 والأقساط الشهرية المقترحة في C1. يظهر على الشاشة أدناه قرض السيارة والبالغ 4000$، بمعدل فائدة 11% سنويا، ومدفوعات شهرية 200 دولار.



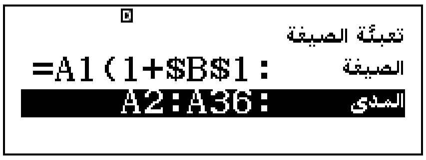
سوف نستخدم في العمود A أمر تعبئة الصيغة لإظهار الرصيد في بداية كل شهر. الفكرة الأساسية هي أنه في كل شهر

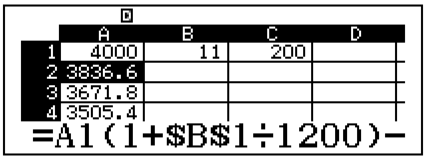
الرصيد الجديد = الرصيد السابق + الفائدة – السداد

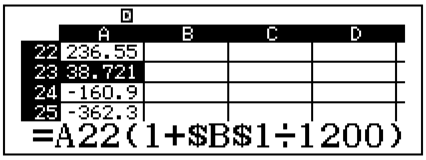
والدالة المناسبة لتعبئة هذا، (وستكون في الخلية A2)، هي:

=A1(1+$B$1÷1200)-$C$1

ستكون الفائدة الشهرية واحد على اثني عشر الفائدة السنوية. حيث لا يجري عرض هذه الصيغة بشكل كامل في الشاشة أدناه لكونها أطول من أن يجري عرضها، لكن ستكون قادرا على إدخالها بنجاح. تولد الصيغة أرصدة في بداية كل شهر لمدة 36 شهرا أو ثلاث سنوات:

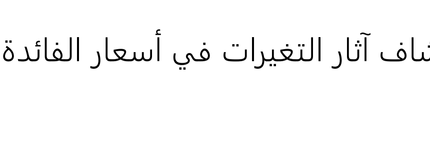


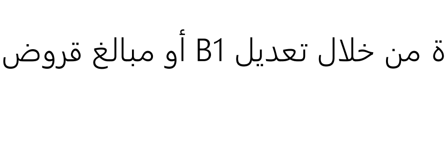




قم بالتنقل لأسفل القائمة لكي ترى كيف وصل الرصيد إلى 38،72$ في بداية الشهر الـ23، حيث تكون الدفعة النهائية أقل من 200 دولار. ستجد أيضا بأن القرض لن يستمر لثلاث سنوات. لاحظ أنه يمكنك التنقل لأعلى وأسفل مع ▲ و ▼.8

مع تغيير الدفعة (230$ بدلا من 200$)، يمكن تسديد القرض بسرعة أكبر ضمن مدة تسعة عشر شهرا تقريبا، كما هو مبين أدناه.





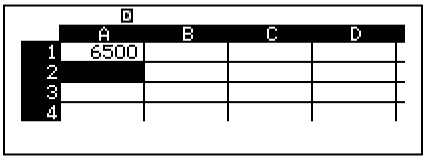
يمكنك أيضا استكشاف آثار التغيرات في أسعار الفائدة من خلال تعديل B1 أو مبالغ قروض مختلفة عن طريق تغيير A1.

المتواليات والمتسلسلات

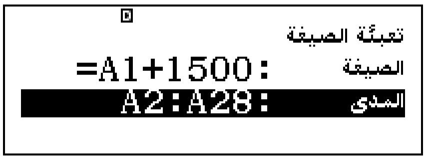
تعتبر جداول البيانات مثالية للنمذجة ودراسة المتواليات والمتسلسلات، حيث يمكن توليد وإضافة الحدود المتتالية. سيجري التطرق لهذه المواضيع في الوحدة 14، وذلك باستخدام قدرات أخرى في آلة ClassWiz.

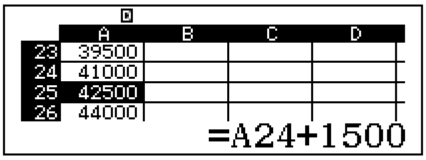
على سبيل المثال، لنفترض وجود رياضي يتدرب من أجل سباق الماراثون (سباق بطول 42.195 كم). وقرر زيادة تحمله عبر ركضه لمسافة 6500 متر في اليوم الأول، 8000 م في اليوم الثاني، 9500 م في اليوم الثالث، وهلم جرا، مع زيادة مقدارها 1500 م يوميا. متى سيصل لمسافة كامل الماراثون لأول مرة؟ كم هي المسافة الكاملة التي قطعها مع كل تلك المسافات بحلول ذلك الوقت؟

ابدأ جدول جديد مع المسافة الأولى في A1.



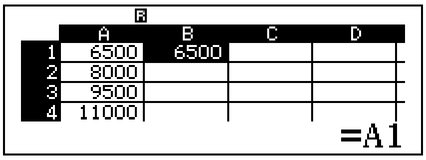
استخدام أمر تعبئة الصيغة لإيجاد المسافة التي ركضها في الأيام التالية وذلك لفترة أربع أسابيع كما هو مبين أدناه. يجري وصف القيم في العمود A كمتوالية.



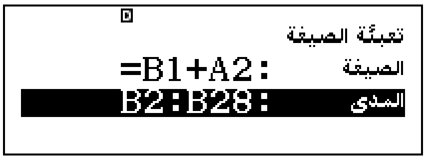


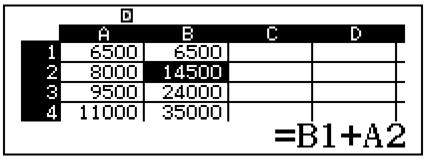
يبين جدول البيانات متوالية المسافات التي يجري ركضها كل يوم، وذلك مع تمثيل كل يوم بصف. ويؤدي التنقل عبر الصفوف لمعرفة أنه سيصل لمرحلة قطع كامل الماراثون خلال اليوم الـ 25.

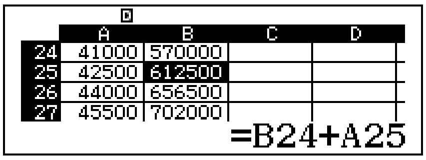
لمعرفة مجموع المسافات التي قطعها مع نهاية كل يوم، من الضروري إضافة المسافات المتتالية. سنقوم بتسجيل المجاميع في العمود B، بعد استخدام صيغة لنسخ القيمة الأولى إلى B1:



في كل يوم، تتزايد المسافة الإجمالية مع كمية الجري الإضافي الذي يقوم به العداء وذلك كما هو في العمود A. بالتالي، ومع أمر تعبئة الصيغة مناسب في B2، يمكن حساب المجموع التدريجي مع مرور كل يوم، ستظهر الكمية في الأسفل. تحقق عقليا من أن الأولى صحيحة. وتشكل هذه القيم المتعاقبة متسلسلة.







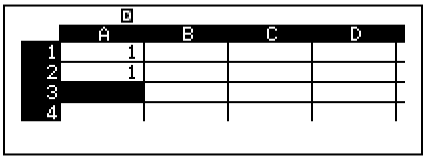
يُظهر التمرير لأسفل العمود B أنه بحلول اليوم الـ 25، سيجري لمسافة إجمالية قدرها 612.5 كلم.

متوالية فيبوناتشي

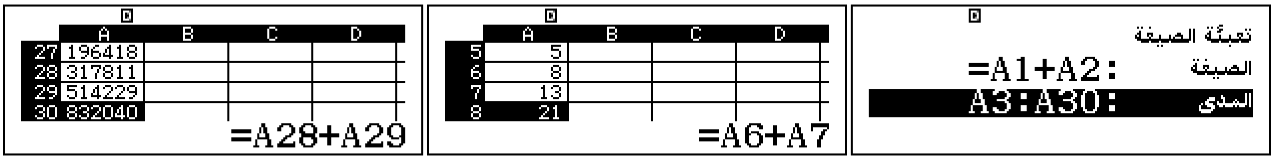
لقد جرى استخدام متوالية شهيرة لتصميم نموذج لتناسل الأرانب. تبدأ الأرانب بزوج واحد لا ينجب خلال الشهر الأول، ولكن في الشهر الثاني ينتج زوجا من الأطفال. بدوره زوج الأطفال لا يتناسل في الشهر الأول، لكن يتناسل بعد ذلك في كل شهر وهلم جرا. علاوة على ذلك، لا تموت الأرانب. وتسمى هذه المتوالية باسم متوالية فيبوناتشي والتي سميت على اسم عالم الرياضيات الإيطالي المشهور في العصور الوسطى. تحقق بنفسك أن عدد أزواج الأرانب في كل شهر هو:

1، 1، 2، 3، 5، 8، ...

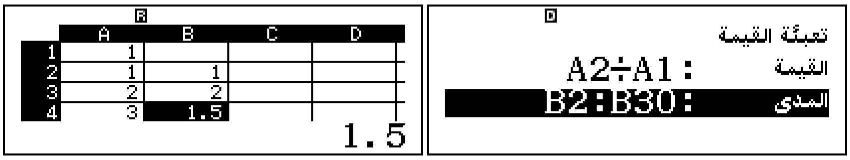
من أجل نمذجة نمو الأرانب، ابدأ بجدول تعداد (للأزواج) في بداية أول شهرين في A1 و A2، بالشكل:



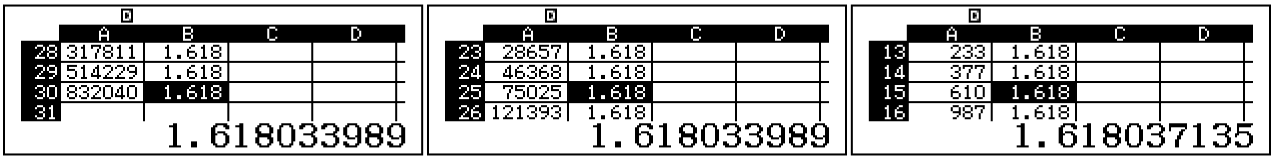
كل حد لاحق في العمود A يتكون من مجموع الحدين السابقين، بالتالي، يوجد أمر تعبئة الصيغة مناسب من أجل توليد أول ثلاثين حد من هذه المتوالية موجودة في الأسفل، مع باقي الحدود. تحقق بنفسك من أنها صحيحة.



يغدو هناك سؤال رياضي مثير للاهتمام يتعلق بنسبة عدد الأرانب في أيام متتالية. لذلك، بعد اليوم 3، ستكون النسبة 2= 2:1، وبعد اليوم 4 ستكون 1.5 = 3:2، وبعد اليوم 5 ستكون1.667 = 5:3...إلخ. من أجل دراسة كيف تتغير هذه النسب على مر الزمن، يكون أمر تعبئة القيمة مفيدا وذلك كما هو موضح بدءا من الخلية B2. (يعتبر أمر تعبئة القيمة أفضل من أمر تعبئة الصيغة هنا وذلك بهدف رؤية المزيد من الخانات العشرية في النتائج).



إذا كنت قمت بدراسة هذه النسب في العمود B، ستلاحظ حقيقة مذهلة هي أنك ستقترب أقرب وأقرب لقيمة وحيدة تدعى النسبة الذهبية الشهيرة ...1.61803 ≈ Φ. والمرتبطة غالبا بالجمال.



لا تكرر هذه النسب نفسها في كل مرة، وذلك بالرغم من أنها تبدو متساوية في الشاشات الماضية أعلاه، ولكن سيساعدك الجدول على التأكد من أنها تتقرب إلى قيمة وحيدة (والتي ستكون في الواقع عددا غير كسري، لذلك لا يمكن أن تكون نسبة عددين صحيحين).

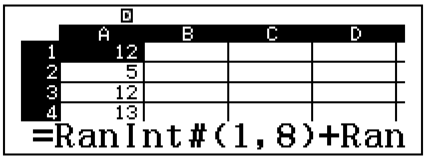
نمذجة العشوائية

رأيت في الوحدة 12 كيف أن الأحداث العشوائية يمكن محاكاتها في الآلة الحاسبة ClassWiz. يسمح لك استخدام جدول بيانات بجمع العديد من الملاحظات عشوائية بسرعة لمعرفة نتائجها و أي توجه لها.

على سبيل المثال، انظر في رمي نردين بثمانية أوجه، كل وجه من تلك الوجوه له احتمالية متساوية للظهور. ما هي النتيجة المحتملة لإضافة الرقمين الظاهرين على وجهي النردين؟ لنمذجة مجموع النردين، نحن في حاجة لصيغة أطول من إمكانية عرضها على شاشة ClassWiz، ولكن يمكن إدخالها دون صعوبة باستخدام أمر الأعداد الصحيحة العشوائي، باستخدام ALPHA ⊙:

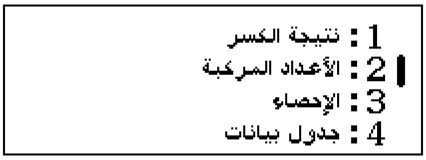
=RanInt(1,8)+RanInt(1,8).

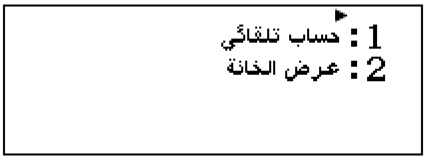
وكما نرى في الشاشة أدناه في جدول البيانات الجديد، يتوفر 45 زوج من رميات النرود (وهو الحد الأقصى المتاح في ClassWiz) قد جرى محاكاته في هذه الحالة.

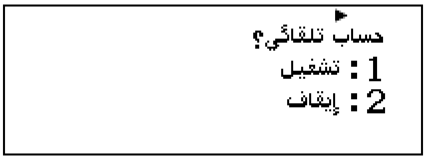


ولأن هذه البيانات عشوائية، من غير المرجح (للغاية) أن تبدو نتائجك مثل تلك المبينة أعلاه. إذا قمت بالتنقل بين البيانات، ستحصل على إحساس بالقيم النموذجية التي جرى الحصول عليها. قارن ملاحظاتك مع ملاحظات الآخرين.

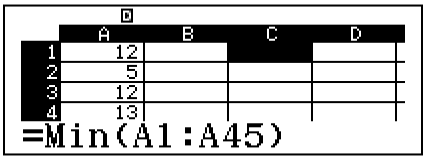
دراسة أكثر كفاءة للبيانات، تستخدم جداول البيانات لتحليلات إضافية. في البداية، قم مؤقتا بإيقاف خيار حساب تلقائي في الإعدادات SET UP وذلك كم هو مبين أدناه:

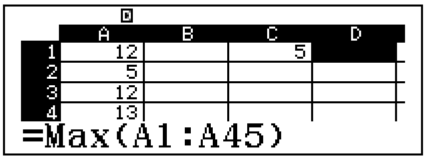


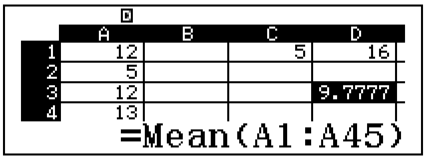




ثم أدرج الصيغ لإيجاد قيمة والمجموع الأصغر، والمجموع الأكبر والمتوسط الخاص بالقيم C1، D1 وD3 على التوالي كما هو مبين أدناه. لا تنسى علامات المساواة.



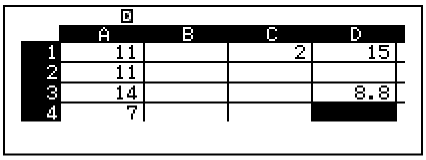


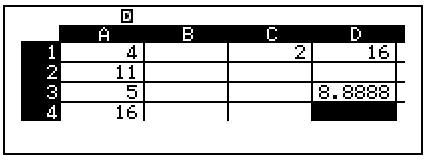


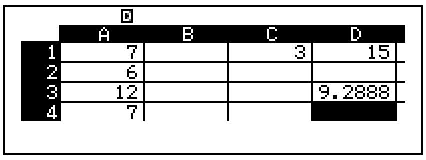
تظهر هذه الشاشات أن المجموعة الأولى (المؤلفة من رمي النردين 45 مرة) تملك حدا أدنى هو 5 (مجموع النردين) وهو يتجاوز الحد الأدنى الممكن وهو 2. كما أنها تملك حدا أقصى هو 16 (وهو الحد الأقصى الممكن) علاوة على متوسط هو 9.78. من غير المرجح أن تكون نتائجك مماثلة لهذه طبعا.

والآن أعد تفعيل الحساب التلقائي من جديد في SET UP.

حالما يجري إعداد جدول بيانات بهذه الطريقة، يمكنك دراسة 45 رمية نرد عبر إعادة الحساب لجدول البيانات (انقر OPTN ▼ 4 للقيام بذلك)، والتي لديها آثار توليد مجموعة جديدة من الرميات. على سبيل المثال، هناك ثلاث مجموعات متتالية كل واحدة منها مؤلفة من 45 رمية حصلنا عليها جنبا إلى جنب مع إحصاءاتها:





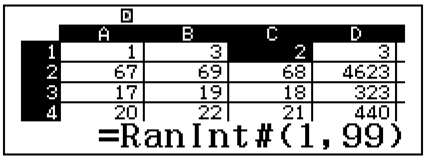


على الرغم من حصولنا على نتائج مختلفة في كل مرة، هناك تشابهات أيضا. قارن نتائجك مع الآخرين. من المرجح أن المتوسطات ستكون قريبة من 9 في كل مرة، والمجموع الأصغر من المرجح أن يكون 2 أو 3 والمجموع الأكبر من المرجح أن يكون 15 أو 16. بطبيعة الحال، لأن هذه تجربة عشوائية، قد لا تحدث هذه النتائج (مثلما لم تحدث في محاولتنا الأصلية أعلاه).

نمذجة المتغيرات

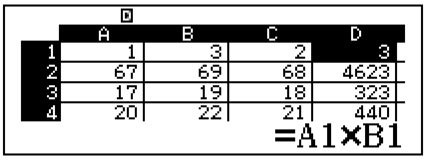
وكمثال أخير، انظر للتعبير الجبري $(x-1)(x+1)$ الذي جرى الحصول عليه بضرب $(x+1)$ بـ $(x-1)$. يمكن استخدام جداول البيانات لرؤية العديد من الأمثلة على ذلك. في الجدول الجديد أدناه، سترى عشرة أعداد

صحيحة عشوائية (قيم لـ x) مخزنة في العمود C، و$(x – 1)$ مخزنة في العمود A، و$(x + 1)$ مخزنة في العمود B، والناتج $(x – 1)(x + 1)$ مخزن في العمود D باستخدام تعبئة الصيغة.



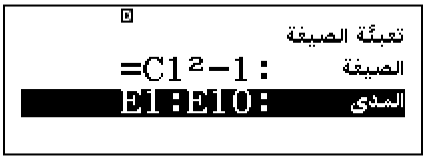
	A	B	C	D
1	1	3	2	3
2	67	69	68	4623
3	17	19	18	323
4	20	22	21	440

=RanInt#(1,99)



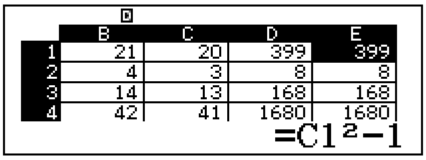
	A	B	C	D
1	1	3	2	3
2	67	69	68	4623
3	17	19	18	323
4	20	22	21	440

=A1×B1



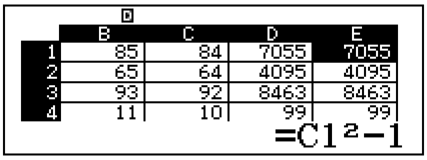
في كل مرة يتم فيها إعادة حساب جدول البيانات، سنجد مجموعة جديدة من قيم x وذلك من أجل القيمة $(x – 1)(x + 1)$. والآن أدخل صيغة جديدة ضمن تعبئة الصيغة في العمود E لحساب $X^2 - 1$، كما هو مبين أعلاه.

وكما نرى في الأسفل، في كل مرة يجري إعادة حساب جدول البيانات بقيم جديدة، سنرى أنه في الوقت ذاته القيم من أجل x (في العمود C)، وقيم العمود D (الذي يمثل $(x – 1)(x + 1)$)، وقيم العمود E (الذي بدوره يمثل $X^2 - 1$) كلها *متطابقة*. يمكنك التحقق من المزيد من القيم في كل مرة عن طريق التحرك إلى أسفل، على اعتبار أن جدول البيانات يعرض أربع صفوف في كل شاشة فقط.



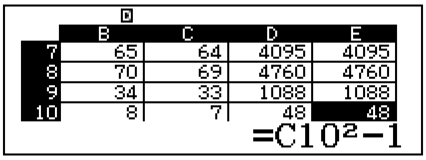
	B	C	D	E
1	21	20	399	399
2	4	3	8	8
3	14	13	168	168
4	42	41	1680	1680

=C1²-1



	B	C	D	E
1	85	84	7055	7055
2	65	64	4095	4095
3	93	92	8463	8463
4	11	10	99	99

=C1²-1



	B	C	D	E
7	65	64	4095	4095
8	70	69	4760	4760
9	34	33	1088	1088
10	8	7	48	48

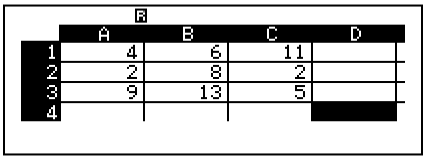
=C10²-1

يساعد جدول البيانات في بيان معنى المتطابقة $x^2 – 1 = (x – 1)(x + 1)$، والتي تكون دوما *صحيحة* بغض النظر عن قيمة x.

تمارين

تساعدك هذه التمارين على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. أدخل البيانات التالية في جدول بيانات جديد



	A	B	C	D
1	4	6	11	
2	2	8	2	
3	9	13	5	
4				

a) أدخل أمر (لا صيغة) في الخلية D1 القاضي بإضافة A1 إلى B2.

b) أدخل صيغة في الخلية D2 لإيجاد A2 + B2 + C2. ثم تحقق من صحة ما قمت به عبر تغيير قيمة A2 إلى 7.

c) أدخل صيغة في الخلية D3 لإيجاد متوسط جميع الخلايا الستة في العمودين A و B. ثم تحقق من ذلك عن طريق تغيير B2 إلى 3.

d) أدخل صيغة في الخلية D4 للعثور على القيمة العظمى للخلايا التسعة في الأعمدة A وB وC؛ ثم تحقق من ذلك عن طريق تغيير B1 إلى 37.

2. استخدام أمر تعبئة القيمة في جدول بيانات جديد من أجل العد بالعشرات في العمود B، مع البدء بـ 3 في الخلية B1 و 13 في الخلية B2. ثم تحقق أن تغيير B1 لا يؤثر على بقية العمود.

3. a) أدخل 5 في الخلية A1 و7 في الخلية D1 وذلك في جدول جديد.

b) استخدام أمر تعبئة الصيغة مع العنوان المطلق للعد بمضاعفات 7 في العمود A وصولا إلى الخلية A30.

C) غير D1 إلى 5 وتحقق من أن العمود A يعد كل الأرقام 5 وصولا إلى 150.

4. a) في جدول جديد، استخدم صيغة لإنشاء متوالية في العمود A تبدأ بـ 1/6 ومن ثم كل حد ثاني يزيد عن الحد الأول بمقدار 1/6. (استخدم المفتاح الكسر من أجل القيام بذلك حتى لو كانت آلة ClassWiz الحاسبة تقوم بعرض الكسور في خط تلقائيا).

b) استخدم الإعدادات SET UP لتغيير خيار عرض الخلية إلى القيمة بدلا من الصيغة، وتحقق من أن النتائج معروضة ككسور في أسفل الشاشة وكأجزاء عشرية في جدول البيانات.

c) ما هي القيمة النهائية في العمود A45؟

5. قم بإنشاء جدول جديد من أجل إنتاج جدول قيم للدالة $f(x) = x^2 + x$. ابدأ مع قيم متعدد من أجل x في العمود A، ثم استخدام أمر تعبئة الصيغة من أجل توليد قيم للدالة في العمود B. تحقق ذهنيا من أن هذه القيم صحيحة.

6. a) أنشئ جدول بيانات جديد لإنتاج جدول قيم لدالة. ابدأ باستخدام أمر تعبئة القيمة من أجل إدخال أرقام العد من 1 إلى 45 في العمود A.

b) قم بإدخال 2 في الخلية D1.

c) استخدم تعبئة الصيغة في العمود B بحيث تكون كل قيمة في العمود B لوغاريتم القيمة المجاورة لها في العمود الأيسر (العمود A)، مع أساس اللوغاريتم في D1. استخدم مفتاح $\log_{\square}\square$ لكن لاحظ أنه في نمط جدول بيانات، سيجري كتابة الأمر تلقائيا في نمط خطي على أنه Log(a,b).

d) تأكد من أن البيانات الخاصة بك تعرض $\log_2 32 = 5$.

e) غير D1 إلى 5 وتحقق من أن $\log_5 25 = 2$.

7. انظر بعناية لجدول البيانات التالي، وأمر تعبئة الصيغة المعروض في الخلية A4.

a) صف تأثير إدخال تعبئة الصيغة. تحقق من القيام بذلك على آلتك الحاسبة.

b) ما هو تأثير تغيير تعبئة الصيغة إلى =Mean(A1:A3)؟ تحقق من إجابتك. عبر القيام بذلك في آلتك الحاسبة، ومن ثم عبر استخدام شاشة SET UP لتغيير خيار عرض الخانة إلى الصيغة.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا

1. صمم وأنشى جدول سداد قرض بقيمة 10,000$ باستخدام دفعات شهرية بمعدل فائدة 9% سنويا، وحدد الدفعات بناء على ذلك. استخدم جدول بيانات للعثور على الدفعات الشهرية اللازمة لسداد القرض في 24 شهرا، وكذلك حساب المبلغ الإجمالي للأموال المسددة في ذلك الوقت. تأكد من أن جدول البيانات الخاص بك مرن بحيث يمكن تغيير قيمة القرض الأصلي والأقساط الشهرية دون الحاجة إلى إنشاء جدول جديد. تحقق من الآثار المترتبة على تغيير سعر الفائدة.

2. لديك مادة مشعة تتحلل بمعدل ثابت حيث تفقد في كل عام 2% من كتلتها. (وهكذا، بعد سنة واحدة، وسيبقى 98% من الكتلة التي بدأت بها). قم بإنشاء جدول بيانات لنمذجة هذه الحالة.

a) كم سيتبقى من المادة بعد 10 أعوام؟

b) بعد كم سنة سوف ينتهي نصف هذه المادة؟ (وهو ما يسمى "نصف العمر").

c) تنبأ ما الذي سيكون عليه نصف العمر ضمن معدل تحلل مختلف (لنقل مثلا 4%). تحقق من تنبؤك باستخدام جدول البيانات.

d) تحقق من معدلات تحلل أخرى.

3. استخدام جداول البيانات لدراسة متوالية مثل فيبوناتشي التي فيها كل حد هو مجموع الحدين السابقين. على سبيل المثال 2، 5، 7، 12، 19، 31، ... حاول تقديم عدة أمثلة مختلفة، وقارن بين نسبة الحدود المتتالية كما فعلنا في قسم متوالية فيبوناتشي في الأعلى.

4. a) أنشئ جدول بيانات جديد للتحقق عما يحدث في حال جرى رمي زوجين من نرد ذي 12 وجها، وجمعت نتائجهم، مع احتمالات متساوية لظهور كل وجه. ضع صيغة في جدول البيانات من أجل إيجاد المتوسط. استخدام جدولك عدة مرات لمعرفة مدى اختلاف المتوسط في كل مرة.

b) قارن نتائجك مع نتائج شخص آخر.

c) أنشئ جدول بيانات جديدا من أجل دراسة ماذا يحدث لو كان هناك نرد ذي 6 أوجه جرى إضافة نتيجته للنتائج السابقة. قارن نتائجك مع نتائج الآخرين.

5. (سيجري التعامل مع المتواليات في الوحدة 14؛ بالتالي قد ترغب بالعودة لهذا النشاط في وقت لاحق).

تحقق مما قد يحدث في نهاية المطاف للمتوالية متكررة $T_{n+1} = kT_n^2 - 1$ من أجل قيم مختلفة لـ k حيث k هي $1 \le k \le 2$.

a) استخدم جداول البيانات للبدء مع $T_0 = 0.4$ و $k = 1$. (تحقق من أن الحدود الأولى هي 0.4، ‎-0.84، ‎-0.2944، ‎-0.9133، ...).

b) جرب قيم بدء أخرى من أجل T_0، مع $0 \le T_0 \le 1$.

c) حالما تجد ماذا يحدث مع $k = 1$، تحقق من قيم أكبر من k، مثل $k = 1.1$ أو $k = 1.4$. قارن نتائجك مع الآخرين.

d) مع قيمة ثابتة لـ k، تحقق من آثار التغييرات الصغيرة في قيمة البداية T_0.

6. استخدام جداول البيانات للتحقق من $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\ldots}}}}}$ وذلك لقيم صحيحة لـ x. ابدأ مع $x = 2$ من ثم جرب $x = 1$ وقيم أخرى.

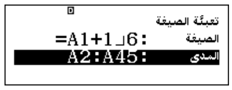
ملاحظات من أجل المعلمين

سلطت هذه الوحدة الضوء على الكيفية التي يمكن فيها للآلة الحاسبة *ClassWiz* دعم الطلاب في تعلم استخدام جداول البيانات في بعض الأغراض الرياضية. يجب على الطلاب قراءة هذه الوحدة لمساعدتهم على رؤية كيفية استخدام هذه الآلة الحاسبة من أجل معاينة أنواع الصيغ المختلفة. وبينما يجب على الطلاب القيام بالتمارين بأنفسهم، من الأفضل القيام بها مع شريك لكي يتمكنوا من مناقشة النتائج معا والتعلم من بعضهم البعض.

إجابات التمارين

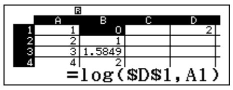
1. a) سيؤدي A1+B2 إلى إنتاج 12 في D1   b) استخدم A2+B2+C2= أو Sum(A2:C2)= من أجل الحصول على 12؛ إن القيمة المتغيرة هي 17.   c) Mean(A1:B3)= ستؤدي إلى إنتاج 7.83؛ إن التغيير في النتيجة هو 9.   d) Max(A1:C3)= سيؤدي إلى إنتاج 13؛ القيمة المتغيرة هي 37.

2. الصيغة في B2 هي B1+10، المجال: B2:B45   3. الصيغة في A2 هي: A1+$D$1,= المدى: A2:A30   4. a) انظر الصيغة في A2 في الأسفل.



c) 7.55. الصيغة في A2 هي A1+1، الصيغة في B1 هي $=A1^2+A1$

6. a) A1=1، الصيغة في A2 هي A1+1 ، المجال: A2:A45   c) انظر لـ B1 في الأسفل



7. a) مجاميع الأعمدة هي: A4=15، B4=27، C4=18   b) متوسطات الأعمدة هي: A4=5، B4=9، C4=6 .

النشاطات

1. يعطي قسم النمذجة المالية في الوحدة مثالا عن كيفية قيام الطلاب بإعداد جداول البيانات الخاصة بهم حيث ينبغي عليهم تجربة دفعات شهرية مختلفة والتحقق من الاقتراب من الصفر مع الشهر الـ25. شجع الطلاب على وضع صيغة في جداول بياناتهم لحساب مجموع المدفوعات. [الإجابات: 440.17$ شهريا و تعطي مبلغ إجمالي هو 11,004$].

2. سيجري نمذجة التحلل الإشعاعي بشكل جيد مع متوالية متكررة (انظر الوحدة 14). إن الكتلة السنوية هي 0.98 كتلة السنة التي سبقتها. بالتالي فإن الصيغة في A2 ستكون 0.98A1=. يمكن للطلاب التنقل إلى الأسفل للتحقق ومعرفة متى يحدث انخفاض 50% من الكتلة الأصلية. شجع الطلاب على استكشاف تغييرات معدل التحلل. [الإجابات: a) 81.7%   b) حوالي 34 سنة   c) حوالي 17 سنة].

3. تعتبر جداول البيانات مثل تلك الخاصة لمتوالية فيبوناتشي مناسبة لهذا التمرين. شجع الطلاب على استخدام العنوان المطلق من أجل أول حدين لسهولة الاستكشاف. ويعد الأمر الغريب جدا أن نسبة الحدود المتتالية تتقارب من النسبة الذهبية وذلك بغد النظر عن القيم الأولية.

4. تعتبر جداول البيانات مثل تلك المستخدمة في النمذجة العشوائية في الوحدة هي المناسبة، مع تغيير الصيغة لتعبر عن النرد المناسب. شجع الطلاب على تبادل نتائجهم بالتالي يجري رؤية التباينات

الصغيرة في المتوسط فضلا عن اتساق النتائج العشوائية. [الإجابات: a) سيكون المتوسط قريبا من المتوسط النظري 13 c) سيكون المتوسط قريبا من المتوسط النظري 10.5].

5. سيؤدي استخدام متوالية متكررة إلى تشتت من أجل القيم الكبيرة لـ k ويجب تشجيع الطلاب على البحث عن المناقشات والتطبيقات الخاصة بهذه الفكرة على الويب. حيث ستقوم جداول البيانات التي تستخدم العنوان المطلق من أجل المتغير k بجعل عملية الاستكشاف أسهل. شجع الطلاب على حساب 45 حد للمتوالية من أجل دراسة الآثار. [الإجابات: a) ستتأرجح المتوالية في النهاية بين 1- ، 0، 1-، 0، ... b) المدهش أنه ليس هناك أي تأثير c) قيم k المنخفضة ستؤدي إلى أنماط متأخرة في المتوالية، ولكن k > 1.4 ستؤدي إلى تشتت d) تتحول المتواليات إلى حالة التشتت، تملك التغييرات البسيطة في القيمة الابتدائية آثار مثيرة، وفيما يبدو تأثيرات عشوائية على المتوالية d) من أجل k > 1.4، تظهر المتوالية "اعتمادا حساسا على الأوضاع الأولية" وهي إحدى سمات التشتت].

6. سيحتاج الطلاب هنا ربما لمساعدة ومناقشة صفية من أجل إعداد جدول بيانات مناسب مثل A1 = 2، صيغة A2 هي (2+A1)√=. [الأجوبة: x = 2 تتقارب إلى 2، ولكن x = 1 تتقارب إلى النسبة الذهبية، وهذا أمر مدهش جدا. لمعرفة السبب، حل المعادلات x = √(2+x) وx = √(1+x)].

الوحدة 14
الاستدعاء الذاتي، المتواليات والمتسلسلات

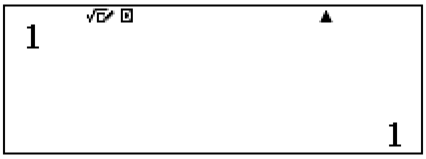
تعد كل من المتواليات والمتسلسلات عناصر هامة في الرياضيات حيث تنبثق من كل واحدة منها فكرة الاستدعاء الذاتي. تقدم ClassWiz عددا من الطرق المختلفة للتعامل مع هذه الأفكار الرياضية، وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، عبر نمطي الجدول وجدول البيانات.

في هذه الوحدة، تأكد من أن آلتك الحاسبة موضوعة على وضع رياضي/رياضي لكل من المدخلات والمخرجات وخيار Norm 2. استخدام شاشة الإعدادات SET UP (عبر SHIFT MENU) للوصول إلى الخيار ومن ثم الضغط على 1 أو 3 للقيام بذلك، إذا لزم الأمر.

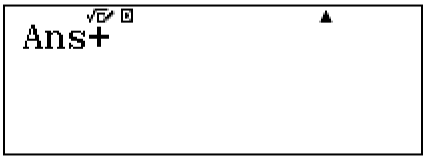
الاستدعاء الذاتي

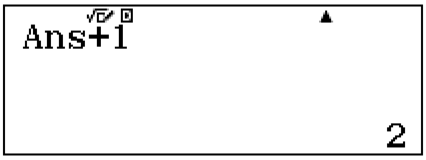
تكمن فكرة الاستدعاء الذاتي الأساسية في استخدام نفس العملية مرارا لإنتاج متوالية أعداد. ربما المثال الأبرز في الرياضيات هو العد وهو عملية تتضمن إضافة 1 إلى عدد من أجل الوصول إلى العدد الذي بعده. ويمكن إجراء عملية التكرار هذه بإضافة واحد بشكل تلقائي عن طريق الآلة الحاسبة.

ابدأ في نمط الحساب عبر إدخال العدد الأول، ثم انقر على =. في المثال التالي، بدأنا مع 1 وذلك على الرغم من إمكانية البدء بعدد مختلف عند الرغبة.

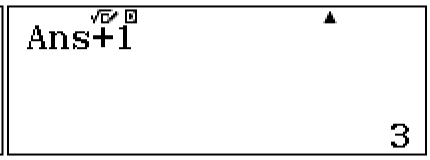


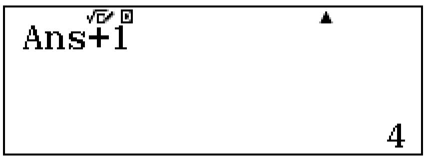
في هذه الحالة، فإن عملية الاستدعاء الذاتي هي "إضافة واحد"، وذلك بإدخال + 1 في الآلة الحاسبة. ولأن عملية الجمع هي عملية ثنائية – أي أن هناك إضافة عددين – ستقوم الآلة الحاسبة بتأويل أمر إضافة واحد على أنه إضافة واحد إلى *النتيجة السابقة*. حالما تنقر على مفتاح +، ستعرض الشاشة +Ans حيث تشير ذاكرة الآلة الحاسبة Ans إلى النتيجة السابقة. أكمل العملية الحسابية بنقر 1 = لإنتاج 1 + 1 = 2، كما هو متوقع.

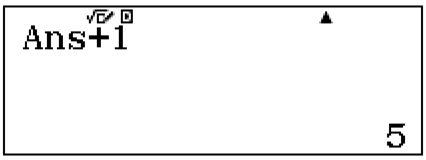




بينما أنه ليس من الضروري بشكل عام استخدام آلة حاسبة قوية مثل هذه لإضافة 1 إلى 1، إلا أن الآلة الحاسبة بهذه الطريقة قد حصلت على أمر إضافة 1 إلى النتيجة السابقة. إذا قمت بالنقر على = من جديد (مع عدم إدخال أي أمر)، ستنفذ الحاسبة آخر أمر جرى إدخاله مرة ثانية. في هذه الحالة، ستنفذ الأمر Ans+1 لإضافة 1 إلى النتيجة السابقة، وذلك في كل مرة تنقر فيها على =. تم الحصول على الشاشات الثلاث التالية عبر النقر على = لثلاث مرات متتالية.





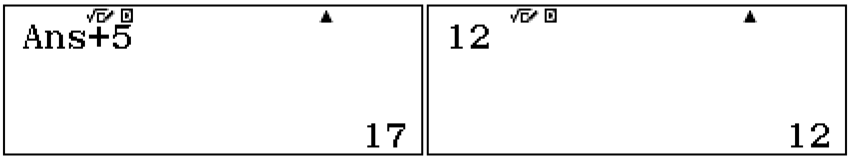


ومع مشاهدتك للنتيجة، يبدو وكأنه لم يتغير شيء في كل مرة تنقر فيها على = باستثناء النتيجة، حيث يظهر نفس الأمر Ans+1 في كل مرة. ولكن، إذا تحققت منه باستخدام المفتاح ▲ ، سترى أن الأمر هو في الواقع *استدعاء ذاتي* في كل مرة، إنه يبدو وكأنه نفسه لأنه هو نفس الأمر.

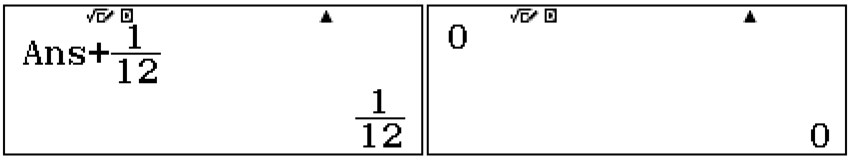
العد الذكي

يمكن توظيف عملية الاستدعاء الذاتي الموصوفة أعلاه (الخاصة باستخدام الإضافة) لعمليات عد أخرى إضافة إلى العد بإضافة 1. يمكنك البدء بنقاط عد مختلفة والعد بكميات مختلفة وذلك عبر تعديل الخطوة الأولى وخطوة الاستدعاء الذاتي وذلك بحسب الرغبة.

على سبيل المثال، العد بإضافة 5 (مع البدء بالعدد 12)، فإن الخطوات الكفيلة بتحقيق ذلك موضحة في الأسفل. في كل مرة تقوم فيها بالنقر على مفتاح =، سيتم إضافة 5 أخرى. من الممكن القيام بذلك عدة مرات متتالية.

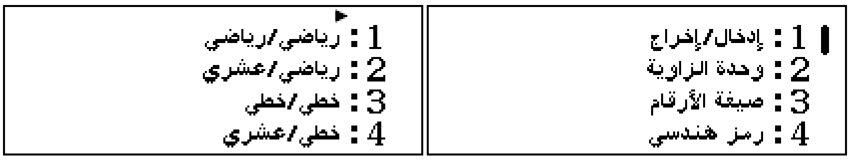


يمكنك العد بإضافةعدد غير كلي، بطبع. في المثال الموجود في الأسفل، نرى كيف أن الآلة الحاسبة تعد بإضافة 1/12 مع البدء بالعدد 0.

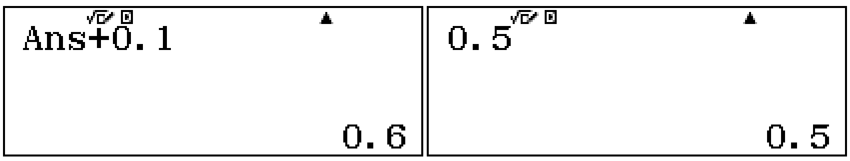


عندما تقوم بالعد بهذه الطريقة، قد تتفاجأ بالنتائج في كل مرة تنقر فيها على مفتاح =، وذلك لقيام الآلة الحاسبة بتبسيط الكسور الناتجة تلقائيا.

في بعض الأحيان، قد يكون من غير المفيد أن يجري عرض الكسور تلقائيا. يمكنك تجنب هذا عن طريق النقر على = SHIFT في كل مرة، إلا أن هذا الأمر ممل جدا. البديل الممكن هو ضبط المخرجات لتعطي نتائج عشرية بشكل مؤقت وذلك باستخدام الإعدادات SETUP. بعد اختيار 1: إدخال/إخراج، اختر 2: رياضي/عشري للحصول على نتائج عشرية وذلك كما نرى في الشاشات أدناه.

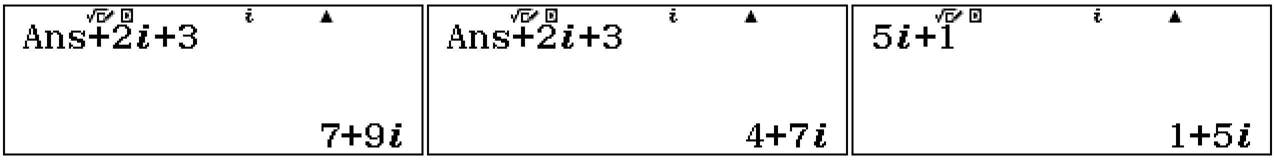


ثم، بعد العد بإضافة 0.1 مع البدء بالعدد 0.5، كما هو مبين أدناه، سيكون من السهل القيام بذلك عبر النقر على = لكل حد:



قد ترغب في تغيير وضع الآلة الحاسبة وإعادتها إلى إخراج النتائج في النمط الرياضي بدلا من العشري وذلك اعتمادا على ما تريد القيام به لاحقا.

يمكن استخدام إجراءات الاستدعاء الذاتي في الأوضاع الأخرى. على سبيل المثال، عندما تكون الآلة الحاسبة في نمط الأعداد المركبة (كما هو موضح في الوحدة 9)، فإنه يمكن استخدامها للعد بإضافة الأعداد المركبة.حيث يعرض المثال التالي في الأسفل العد بإضافة($3 + 2i$) مع البدء بالعدد المركب $1 + 5i$

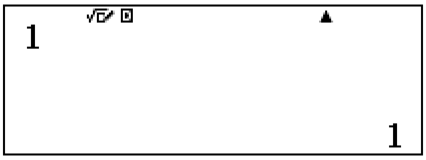


لاحظ أن المكون الحقيقي للرقم يتزايد بمقدار 3 بينما يزداد المكون التخيلي بمقدار $2i$ وذلك في كل مرة تضغط فيها على مفتاح ⊜.

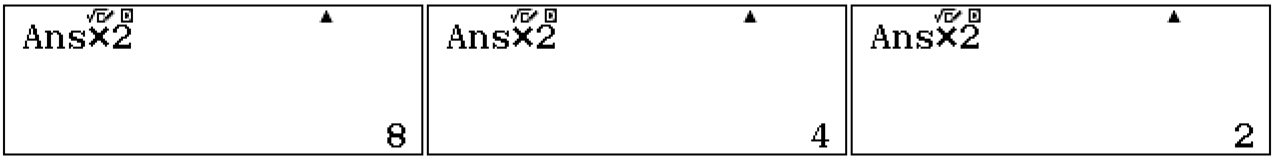
الاستدعاء الذاتي وعملية الضرب

مع إمكانية استخدام إجراءات الاستدعاء الذاتي لنتائج الجمع لمختلف أنواع عمليات العد (وذلك كما رأينا سابقا)، يمكن استخدام ميزة الاستدعاء الذاتي من أجل باقي العمليات الرياضية الأخرى، ومن بينها حالة الضرب المهمة. والتي عندما تطبق بشكل متكرر، تؤدي إلى إنتاج نمو أسي، وهو أمر مهم في كل من العالم الطبيعي وعالم المال.

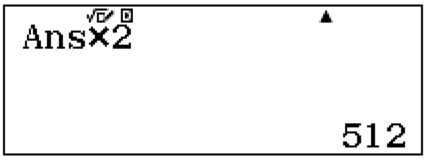
لرؤية مثال، ابدأ مع 1 في الحاسبة:



ثم قم بعرض خطوة الاستدعاء الذاتي الخاصة بالضرب بـ 2. في كل مرة تنقر فيها على ⊜، تقوم الآلة الحاسبة بضرب النتيجة السابقة بـ 2، وهو الأمر الذي ينتج بدورة أسس متتالية لـ 2 وذلك كما هو مبين أدناه.

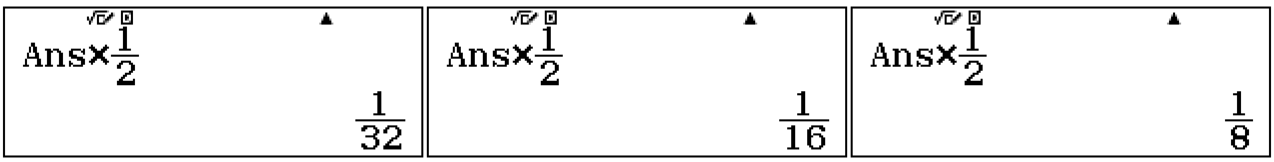


تحقق بنفسك أنه بعد النقر على مفتاح ⊜ لتسع مرات، سترى نتيجة $2^9 = 512$.



تأكد من حساب عدد النقرات بعناية وأنت تتابع عملية النقر.

إذا بدأت بـ 1 ومن ثم قمت بضربه بـ ½ بشكل متكرر، سترى أسس ½ وهي أسس سالبة لعدد 2. [على سبيل المثال، ½ للأس 2 هو نفسه 2^{-2}]. ويجري عرض الحدود الثالثة والرابعة والخامسة في الأسفل:

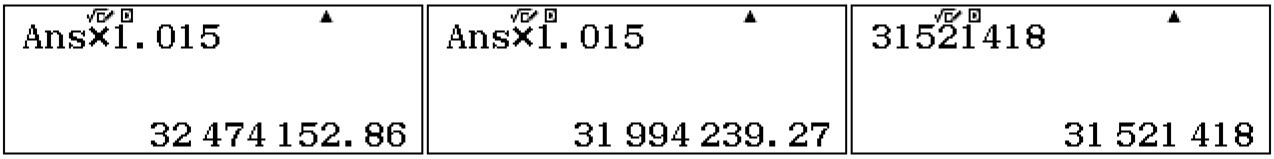


يمكنك ربما التعرف على هذه الحدود الثلاثة على أنها 2^{-3}، 2^{-4} و2^{-5}، على التوالي.

هناك نوع هام من عمليات الاستدعاء الذاتي الضربي والتي فيها كل حد لاحق يكون مضاعف معين للحد السابق. من الأمثلة الجيدة على ما سبق هو النمو السكاني، وذلك لكونه ممارسة شائعة من أجل وصف معدل النمو السنوي لتعداد السكان كنسبة مئوية من تعداد السكان الأصلي.

ويقدر معدل النمو السكاني في المملكة العربية السعودية على شبكة الإنترنت بحدود 1.5% مع تعداد سكاني يصل لـ31,521,418 نسمة. وفي حال استمر المعدل بالنمو على ما هو عليه، سيزيد السكان سنويا بمقدار 1.5% مقارنة بالسنة السابقة. تعتبر الطريقة الأسهل للحصول على 1.5% هي الضرب بمقدار 1.015.

إذا جرى القيام بذلك بشكل متكرر على الحاسبة، يمكن التنبؤ بالعد بكفاءة وذلك كما هو موضح أدناه.

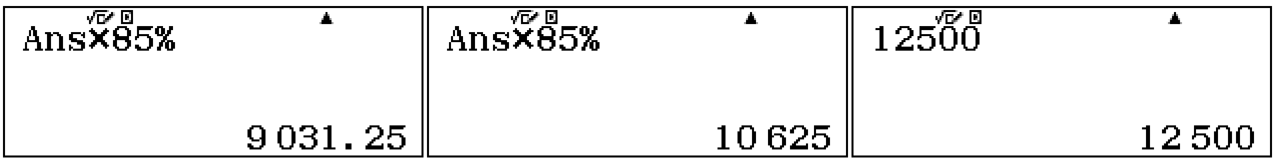


تشير الشاشتين التاليتين إلى أن تعداد سكان المملكة العربية السعودية سيكون حوالي 31,994,239 في منتصف 2016 و 32,474,152 في منتصف عام 2017.

عليك أن تكون حذرا في تفسير هذه النتائج لعدة أسباب: أولا، إن البيانات الأصلية هي في الأصل تقديرات. ثانيا، يستند إجراء الاستدعاء الذاتي على افتراض أن معدل النمو السكاني سيبقى ثابتا وذلك بالرغم من وجود الكثير من العوامل التي قد تغير هذا الافتراض. ثالثا، تُعطى هذه النتائج مع عدة خانات عشرية، وهو غير منطقي لأن يكون عدد السكان عدد غير كلي. مع الأخذ بما سبق، يجب أن تتمكن من التحقق باستخدام آلتك الحاسبة بأن تعداد سكان المملكة العربية السعودية سوف يصل إلى 40 مليون شخص بحول 2031.

يمكن للأعداد أن تصبح أصغر بشكل كبير مع الضرب في حال جرى ضربها برقم أقل من واحد. وتدعى العملية التي تتناقص فيها كمية مع ضربها بالعدد نفسه في كل مرة باسم *التحلل الأسي* (وذلك كما رأيت في الوحدة 6). من أبرز الأمثلة على هذا الأمر التحلل الإشعاعي للمواد، المستخدم في الكربون. مثال جيد آخر في العالم من صنع الإنسان، ينطوي على انخفاض في القيمة.

ولتوضيح مثال حول انخفاض القيمة على أنه عملية استدعاء ذاتي، من أجل أغراض التأمين والضرائب، يُنظر لأثاث مكاتب الأعمال التجارية الصغيرة على أن قيمته تنخفض بنسبة 15% سنويا. إذا بدأنا بمفروشات بسعر 12,500 دولار، يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإنشاء استدعاء ذاتي لإظهار قيمة الأثاث المنخفضة سنويا. ولأجل هذا المثال، يجري الضرب سنويا بنسبة 85%، والتي هي قيمة الأثاث المتبقية بعد إنقضاء سنة. وتبين الشاشات أدناه تأثير انخفاض القيمة هذه. (يمكن الوصول لرمز النسبة المئوية عبر النقر على SHIFT Ans).



لاحظ أنه من المقبول أيضا استخدام 0.85 بدلا من 85٪، لتحديد قيمة الأثاث بعد كل سنة. إذا استخدمت هذه العملية بعناية، وأحصيت عدد المرات التي نقرت فيها مفتاح =، يجب أن تكون قادرا على الرؤية بنفسك أن المفروشات سوف تنخفض عن قيمتها إلى ما يزيد قليلا على 4000$ خلال فترة سبع سنوات.

المتواليات

إن المتوالية هي عبارة عن مجموعة من الأعداد بترتيب معين. في الرياضيات، تملك المتوالية عادة قاعدة واضحة المعالم لبنائها. بشكل عام، يتم كتابة متوالية مع حدود مرتبة بشكل مناسب، ومفصول فيما بينها بفواصل. ربما رأيت بعض الأمثلة على هذا الأمر في هذه الوحدة بما في ذلك تتالي سلسلة أرقام العد.

1، 2، 3، 4، 5، ...

وتتالي عدد مضروب بـ 2:

1، 2، 4، 8، 16، 32، ... (أي 2^0، 2^1، 2^2، 2^3، 2^4، 2^5،...)

يمكن تعريف المتوالية عموما بطريقتين، إما بشكل استدعاء ذاتي، أو بشكل صريح. ويتضمن تعريف الاستدعاء الذاتي إعطاء الحد الأول ومن ثم وصف كيفية إنشاء باقي الحدود. وذلك كما تم توضيحه في هذه الوحدة في الفقرات السابقة.

أما تعريف المتوالية الواضحة فيتضمن إعطاء قانون لإيجاد أي حد معين. وبما أن الحدود موصوفة على أنها الأول والثاني والثالث والرابع.... يبدو من الواضح أنه لابد من استخدام أرقام كلية من أجل هذه الحدود. بالتالي من الشائع التعبير عن الحد النوني (n^{th}) (وغالبا ما يجري تمثيله على أنه T(n) أو T_n) كدالة لرقم الحد، n من أجل n كرقم للعد.

وهكذا، في الحالة الأولى أعلاه، تعرف المتوالية على النحو التالي:

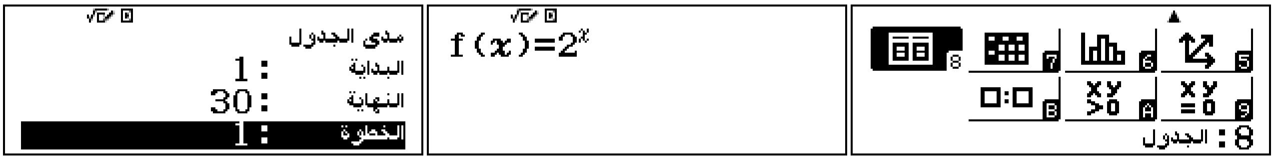
$T(n) = n$ من أجل رقم العد n.

كما يمكن أيضا تعريف قوى 2 بمتوالية هي:

$T_n = 2^n$ من أجل n = 1، 2، 3، 4 ...

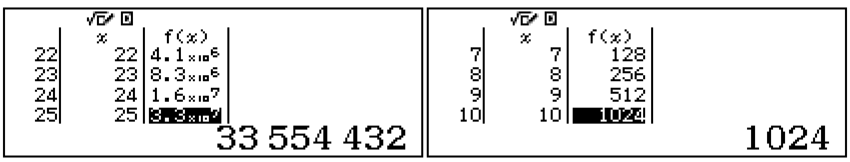
بينما من المريح توليد الحدود بميزة الاستدعاء الذاتي كما فعلنا سابقا في هذه الوحدة، الأكثر كفاءة في بعض الأحيان توليد حد معين باستخدام تعريف واضح حيث يكون جدول القيم مفيدا لتوليد حدود متتالية على الآلة الحاسبة، وذلك على اعتبار أنه يمكننا التفكير في المتوالية كنوع خاص من الدوال (فيها المتغير هو عدد كلي فقط).

قم بوضع آلتك الحاسبة على نمط الجدول، وعرف المتوالية كما هو مبين أدناه.



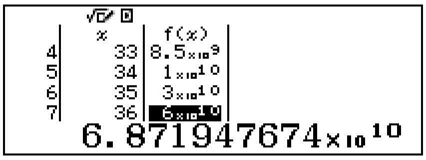
لاحظ كيف أن الآلة الحاسبة تطلب استخدام x بدلا من n لتمثيل رقم الحد، و f(x) من أجل تمثيل الحد T_n ؛ ولكن $f(x) = 2^x$ هي نفسها $T_n = 2^n$. انقر ⊟ لمواصلة تحديد المتوالية حيث تقتصر الحدود المولدة في هذا النمط على 30 حد في أي وقت. بالتالي يمكننا فقط الحصول على أول 30 حد من هذا النمط كما هو موضح أعلاه. انقر على ⊟ بعد كل عملية إدخال.

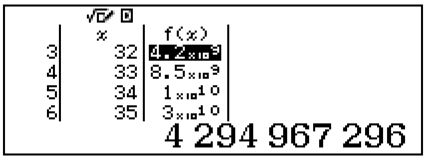
يمكنك التنقل لأعلى وأسفل للعثور على الحدود المختلفة لهذا المتوالية حيث تعرض الشاشتين في الأسفل الحدين العاشر والخامس والعشرين.



لاحظ أن الحد الـ25 موجود في أسفل الشاشة (مع وجود المؤشر في عمود f(x) المجاور لـ x = 25). ويعرض الجدول أيضا الحد نفسه، إلا أن الكمية الصغيرة من الفراغ تعني أن الآلة الحاسبة تعرضه بالكتابة العلمية.

إذا أردت العثور على حدود أخرى في المتوالية (مثل الحد الـ 32 والـ 36)، يمكنك تغيير مواصفات الجدول. ابدأ عبر النقر على AC وقم بتغيير معاملات "البداية" و"النهاية"، ولكن اترك "الخطوة" على حالها على 1.

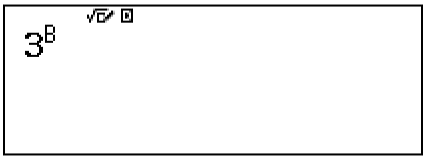




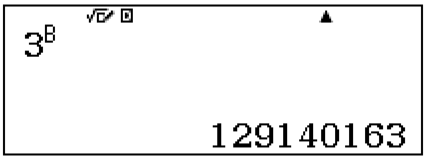
وكما تعرض الشاشات أعلاه، فإن الحد الـ32 هو 4,294,967,296. لاحظ أنه إلى جانب x = 32. إلا أنه في هذه الحالة، لن يجري عرض الحد الـ 36 بالكامل من قبل الآلة الحاسبة، ولكن يمكن تقريبه بالكتابة العملية وذلك لكونه يملك خانات أكثر من قدرة الآلة الحاسبة على التعامل معها.

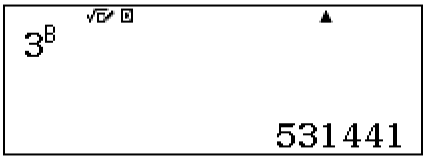
عندما يكون لديك تعبير من أجل الحد النوني لمتوالية، من الممكن أيضا تقييم حد معين وذلك باستخدام ميزة CALC في الحاسبة في نمط الحساب. من السهل في بعض الأحيان استخدام هذا بدلا من إنشاء جدول القيم وبخاصة إن كنت تريد قيمة واحدة أو قيمتين ولست مهتما بكامل متوالية القيم.

لتوضيح ذلك، لننظر في متوالية تتألف من قوى العدد 3 (معطاة بالصيغة $T_n = 3^n$، من أجل n = 1، 2، 3، ...). ادخل التعبير المناسب في الآلة الحاسبة؛ يمكن استخدام أي من متغيرات الآلة الحاسبة من أجل هذه الغاية. للتوضيح، استخدمنا B من أجل المثال أدناه.



ثم اضغط CALC متبوعة بالقيمة المطلوبة ومن ثم مفتاح =. لا تنقر على AC (على اعتبار أنها ستقوم بمسح التعبير)، ولكن انقر = من جديد من أجل القيمة المرغوبة التالية.





تعرض الشاشتين هذه العملية للعثور على الحدين الـ12 والـ17 على التوالي.

المتواليات الحسابية

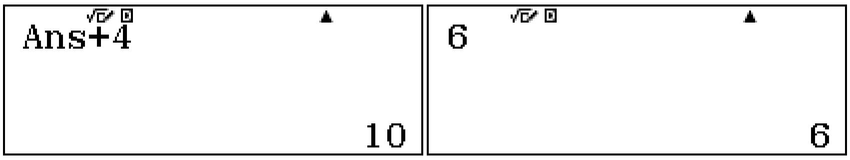
هناك نوع معين من المتواليات يعتبر مهما في الرياضيات وهو *المتوالية الحسابية*، والتي تدعى أحيانا باسم *المتوالية العددية*. تعتبر هذه متوالية فيها الحد الأول (الممثل بـ a) والفرق المشترك (الممثل بـ d) بين الحدود المتتالية. ويعني هذا، يمكن الحصول على كل حد عبر إضافة رقم ثابت إلى الحد السابق له.

من أفضل الأمثلة على هذا هو تعرفة سيارات الأجرة والتي فيها يجري وضع أجرة لكل رحلة ويجري دفع مبلغ محدد من المال لكل كيلومتر مقطوع. لنفترض إن لدينا $a = 6$ و$d = 4$. بالتالي، يكلف التاكسي 6$ من أجل البداية و4$ من أجل كل كيلومتر مقطوع. [في الممارسة العملية، تفرض العديد من سيارات الأجرة رسوما لأجزاء الكيلومتر، ولكن سوف ننظر هنا لحالة بسيطة بهدف التوضيح].

تعتبر متوالية التكاليف لمختلف الكيلومترات المقطوعة هي متوالية حسابية:

6، 10، 14، 18، 22،...

يمكن تمثيل هذا في الآلة الحاسبة إما عبر استدعاء ذاتي أو صريح حيث تعرض الشاشات أدناه حالة استدعاء ذاتي. وبعد قطع السيارة مسافة 1 كم، غدت التعرفة 10$. (هذا هو الحد الثاني من المتوالية).



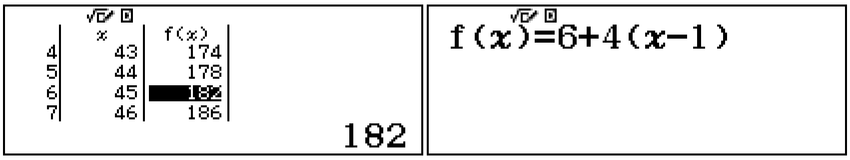
يمكن تحديد أجرة سيارة الأجرة بهذه الطريقة، وذلك عبر النقر على مفتاح = بعدد مناسب من المرات.

وبينما يعتبر مقبولا من أجل رحلة قصيرة، فإنه سيكون مملا جدا القيام بذلك من أجل الرحلات الطويلة (مثل رحلة بمسافة 44 كم)، وبالتالي يمكن حساب ذلك بالنسخة الصريحة عبر متوالية حسابية. في الحالة العامة، سيكون الحد النوني لمتوالية حسابية معطى بالعلاقة.

$$T_n = a + (n-1)d$$

وذلك على اعتبار أن الحد النوني يتضمن إضافة d إلى a من أجل مجموع هو 1 -n مرة.

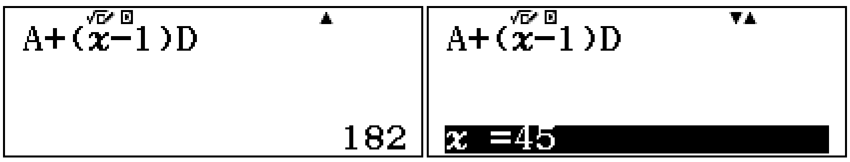
تعرض الشاشة الأولى أدناه كيفية إعداد الدالة في نمط الجدول من أجل توليد حدود هذه المتوالية ال الحسابية ، أما الشاشة الثانية فتعرض كيف أن الرحلة التي طولها 44 كم ستكلف 182$.



لاحظ في هذه الحالة كيف أن تكلفة رحلة طولها 44 كم هي الحد الـ 45 من المتوالية (على اعتبار أن الحد الأول يساوي صفر كم).

أيضا، يمكن توليد حدود فردية لمتتالية باستخدام CALC. في هذه الحالة، نحتاج لثلاثة متغيرات هي a وd وn. ويمكن استخدام متغيرات الآلة الحاسبة A و D جنبا إلى جنب مع x (من أجل n). انقر على CALC وادخل القيم من أجل المتغيرات مع البدء بـ 6 = A و 4 = D ، متبوعين بـ =.

ثم استخدم المفتاح ▼ لتظليل x وتعيين قيمة مناسبة، ثم اضغط =. تظهر الشاشات أدناه المثال من أجل 45 = x لتحديد الأجرة من أجل الرحلة البالغ طولها 44 كم. بعد تعيين 45 = x، اضغط = مرة أخرى للحصول على الحد الـ 45:



تحتفظ الحاسبة تلقائيا بالقيم السابقة الأمر الذي يجعل هذه العملية فعالة إلى حد كبير. انقر على = من جديد لإدخال قيم إضافية لـ x. تحقق بنفسك من أن الرحلة لمسافة 55 كم (56 = x) ستكلف 226$.

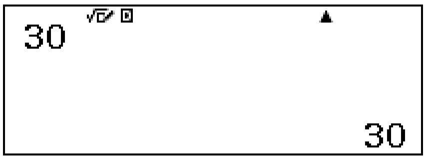
المتواليات الهندسية

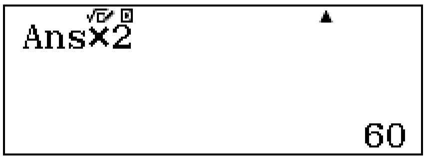
تعد المتواليات الهندسية مهمة جدا في الرياضيات أيضا حيث تختلف عن المتواليات الحسابية في العلاقة بين الحدود المتتالية، حيث تكون مضاعفات بدل من إضافات. بشكل عام، يتم تمثيل الحد الأول من متوالية هندسية بالرمز a. أما r فهي النسبة المشتركة بين الحدود المتتالية. يعني هذا، يمكن إيجاد كل حد عبر ضرب الحد السابق له بالقيمة r.

من الأمثلة على ذلك هو ما يحدث في علم الأحياء عبر نمو خلايا عينة ما. إذا كان لدينا 30 خليه، وكان العدد يتضاعف كل ساعة، بالتالي سيكون لدينا $a = 30$ و $r = 2$. وتكون متوالية أعداد الخلايا في كل ساعة هي:

30، 60، 120، 240، 480، ...

يمكن تمثيل المتوالية الهندسية على الآلة الحاسبة إما بشكل استدعاء ذاتي أو بشكل صريح. وفيما يلي نسخة الاستدعاء الذاتي.



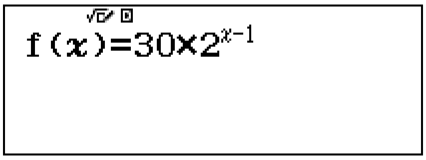


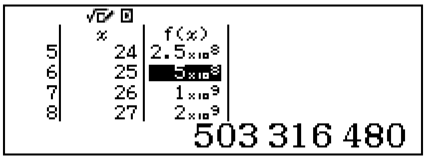
يقوم النقر على مفتاح = بتوليد حدود جديدة من المتوالية. وبالرغم من سهولة الحصول على الأرقام الأولى من هذه المتوالية، يغدو من الصعب جدا القيام بذلك لاحقا (مثل إيجاد عدد الخلايا التي ستكون هناك خلال فترة 24 ساعة).

تستخدم النسخة الصريحة الحد النوني للمتوالية الهندسية T_1، T_2، T_3، ... مع الحد الأول a والنسبة الشائعة r، بالتالي يجري الحصول على الحد النوني عبر ضرب a بـ r بما إجماله $n - 1$ مرة.

$$T_n = ar^{n-1}$$

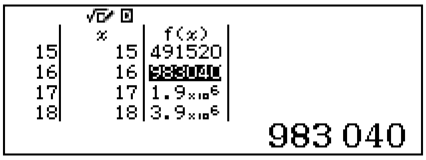
تعرض الشاشة الأولى أدناه كيفية إعداد المتوالية في نمط الجدول بينما تعرض الشاشة الثانية بعض حدود هذه المتوالية.

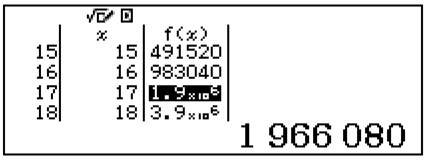




تعرض الشاشة الثانية أنه بعد 24 ساعة (والتي هي بداية الساعة الـ25) سيكون هناك أكثر من 500 مليون خلية في العينة.

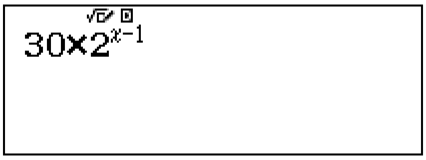
تسمح لنا إمكانية الوصول إلى حدود عديدة في العينة بطرح أسئلة أخرى. على سبيل المثال، لنفترض أن العالم أراد معرفة متى سيصل عدد الخلايا إلى مليون خلية.

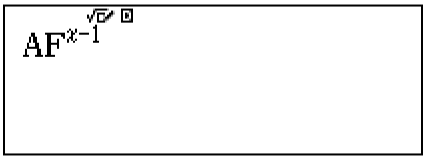




تذكر أنه بشكل عام فإن الحد النوني يعرض التعداد في زمن هو $(n - 1)$ ساعة. تعرض هذه الشاشات كيف أن الحد الـ 16 للعينة هو تقريبا واحد مليون، بينما الحد الـ 17 للعينة (بعد ساعة) هو تقريبا مليونين. بالتالي، يبدو بأن تعداد الخلايا يصل المليون بعد 15 ساعة.

ويمكن أيضا إيجاد متوالية هندسية باستخدام CALC. في هذه الحالة، يجري عرض تعبير عام في الأسفل وذلك باستخدام F بدلا من r وx بدلا من n. أما الحل البديل فهو استخدام التعبير الخاص، مثل ذلك الموجود على اليسار وذلك من أجل تجنب إدخال قيم a وr بشكل متكرر.





وكما هو الحال في المرة السابقة، اضغط CALC من أجل بدء عملية إيجاد قيمة التعبير.

المتسلسلة

تتضمن بعض المسائل الرياضية إضافة حدود متتالية من متوالية. حيث يطلق على المجموع الناتج اسم *متسلسلة*. من أشهر الأمثلة على المتسلسلات تلك الناتجة عن مجموع أول n من أعداد العد، والذي يعطي الأعداد المثلثية أدناه:

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

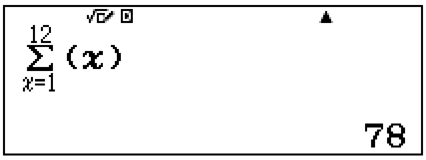
1 + 2 + 3 + 4 = 10، الخ

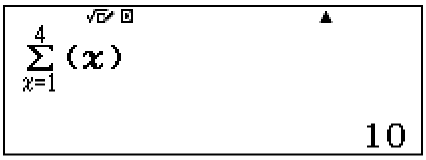
كل عدد من هذه الأعداد هو مجموع الحدود الموجودة في المتوالية والتي فيها $T_x = x$. في الرياضيات، يمكن تمثيل مجاميع مثل هذه على النحو التالي:

$$\sum_{x=1}^{n} x$$

إن الحرف اليوناني Σ هو مكافئ لحرف S كبير ويرمز لكلمة "مجموع". والحدود الموجودة أعلى وأسفل Σ تظهر أن الحدود الواجب إضافتها تبدأ مع أول حد وتنتهي مع الحد النوني. في هذه الحالة، يعتبر الحد العام هو ببساطة x، وذلك من أجل هذه المتوالية من أرقام العد.

يمكن إيجاد متسلسلة على الآلة الحاسبة باستخدام مفتاح (Σ▬) (عن طريق SHIFT x) وذلك كما هو موضح في الأسفل، عندما يكون هناك تعريف صريح للحد العام. ويجب وصف الحد العام لهذه المتوالية باستخدام x (أي مع x) وحدود نهاية المتسلسة المدخلة كأعداد كما هو موضح. استخدم ▶ للانتقال من مكان لمكان.





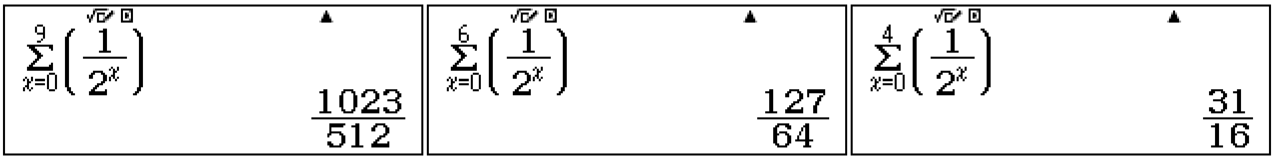
تظهر الشاشات اعلاه المجموع الرباعي في السلسلة والمجموع الإثنى عشر. من أجل الحصول على التعبير الثاني، من الجيد استخدام مفتاح ◀ لتعديل التعبير الأول بدلا من البدء من جديد.

تملك العديد من المتسلسلات الهامة عددا لا نهائيا من الحدود، وبالتالي قد لا يمكن تمثيلها بشكل كامل في الآلة الحاسبة. ومع ذلك، يتوفر تقريبات جيدة لها عن طريق جمع عدد كبير من الحدود.

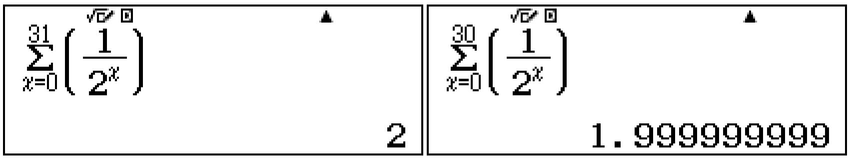
على سبيل المثال، انظر في المتسلسلة الهندسية اللانهائية التالية:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots +\frac{1}{2^n}+\ \dots\ = \sum_{0}^{n}\frac{1}{2^n}$$

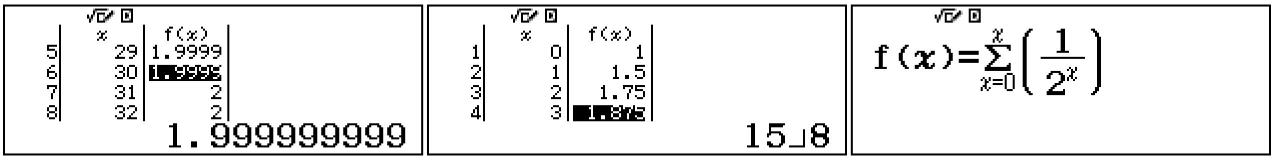
إذا تم الحصول على مجموع حدود متتالية من المتسلسلة، تقترب النتيجة أكثر وأكثر من 2 وذلك كما تقترح الشاشات في الأسفل.



ورغم أن الإجمالي لن يصل أبدا إلى 2 (مع قيام كل حد بتغطية نصف المسافة المتبقية)، ستعتبر الآلة الحاسبة أنه قريب بشكل كافي من 2 وتقرب النتيجة إلى العدد 2 وذلك بعد جمع 32 حد كما هو مبين أدناه.



وبما أن الحد الصريح لهذه المتسلسلة، يمكن أيضا إيجاده باستخدام الجدول، وذلك كما هو موضح في الأسفل.



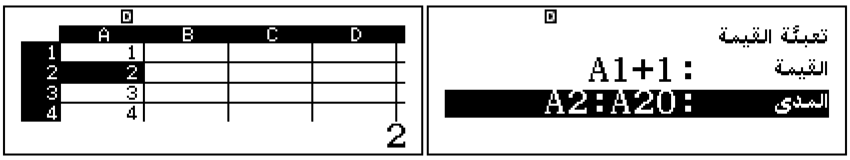
هذا النوع من المتسلسلة يسمى متسلسلة متقاربة وهي مهمة جدا في مجال الرياضيات العليا.

المتواليات والمتسلسلات على جداول البيانات

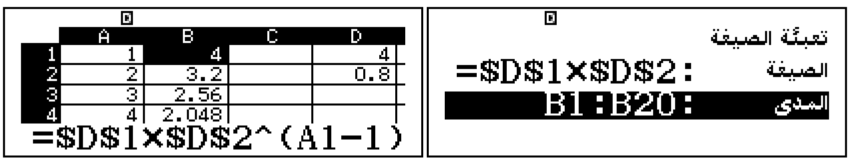
يمكن تعريف وإيجاد كل من المتواليات والمتسلسلات مع جداول البيانات وذلك من خلال استخدام صيغ التعبئة المناسبة (انظر الوحدة 13 للمزيد من التفاصيل حول كيفية استخدام صيغ التعبئة في جداول البيانات). كلما كان هناك تعريف صريح أو استعادة ذاتية للحد النوني من متوالية، يمكن توليد متوالية في جدول البيانات ويمكن دراسة المتسلسلة المرتبطة بها أيضا.

على سبيل المثال، لدينا متوالية هندسية مع حد عام هو $T_n = ar^{n-1}$ ممثلة في العمود B من جدول البيانات أدناه، والذي فيه الحد الأول a موجود في D1 والنسبة المشتركة r موجودة في D2. يحوي العمود A قيم رقم الحد n.

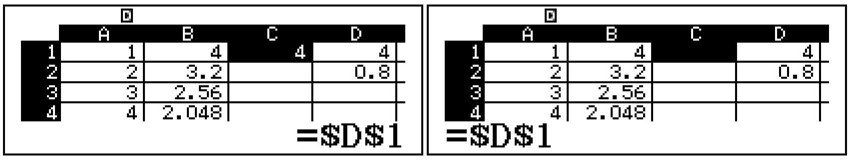
ابدأ بإدخال 1 في A1 ثم قم بتوليد أول عشرين قيمة من n:



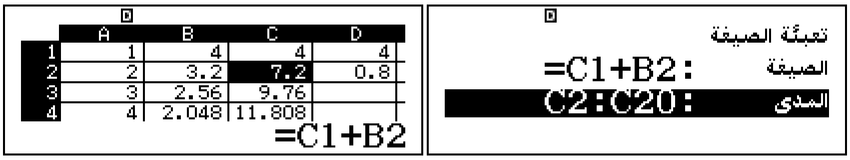
قم بإدخال a في D1 و r في D2 واستخدم أمر تعبئة الصيغة من أجل توليد أول عشرين حد من المتوالية. (إن صيغة التعبئة معروضة في الشاشة الثانية). وتعرض الشاشة الثانية حالة خاصة فيها أول عشرين حد من متوالية هندسية مع $a = 4$ و $r = 0.8$ وذلك كمثال:



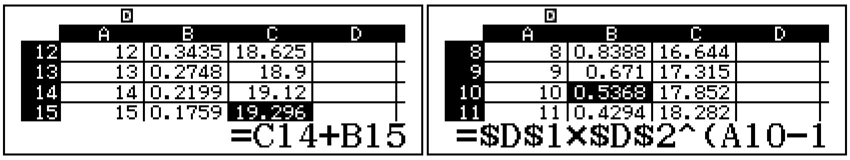
أخيرا، يمكن توليد المتسلسلة المرتبطة بها في العمود C. ابدأ عبر تخزين الحد الأول (لكل من المتوالية والمتسلسلة) في C1:



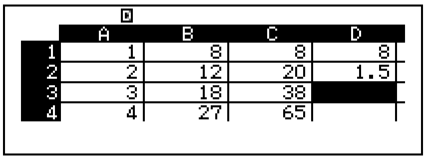
ثم استخدم امر تعبئة الصيغة في C2 لإضافة حد متوالية جديد للمجموع السابق:



حالما يجري تمثيل المتوالية والمتسلسلة بشكل صحيح، يمكن الإجابة على المسائل المهمة عبر التنقل في جدول البيانات. على سبيل المثال، الحد العاشر من المتوالية في B10 هو 0.5368، بينما مجموع الحدود الأولى الـ15 موجودة في C15 هو 19.296. يبدو وكأن المتسلسلة تتقارب إلى 20 (على الرغم من الحاجة إلى معاينة حدود أكثر للتأكد من هذه النتيجة بمزيد من الثقة.)



لدراسة متوالية هندسية مختلفة، مثل تلك التي فيها $a = 8$ و $r = 1.5$، من الضروري فقط تعديل D1 و D2 وذلك كما هو مبين أدناه حيث سيؤدي ذلك لإنشاء متوالية وسلسلة جديدتين تلقائيا.



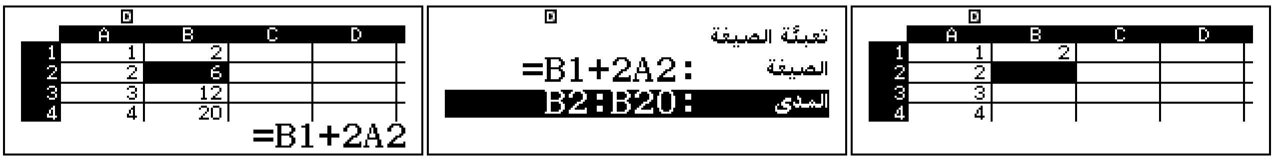
عندما لا يكون هناك تعريف صريح للمتوالية، ولكن الاستدعاء الذاتي الخاص بها معروف، ستكون جداول البيانات مفيدة هنا. على سبيل المثال، انظر في هذه المتوالية:

$T_1 = 2$

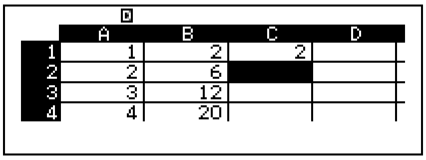
.n > 1 من أجل $T_n = T_{n-1} + 2n$,

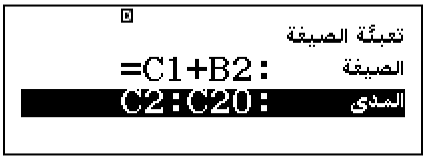
الاستدعاء الذاتي في الخطوة الثانية يجعل من الواضح كيف يمكن توليد حد من هذه المتوالية من الحد السابق، إلا أنها لا تسمح لك بإيجاد حد معين من المتوالية (مثل الحد الـ 15) أو المتسلسلة المرتبطة، بالتالي لا يمكن استخدام الجداول و CALC و (∑-) بشكل فعال.

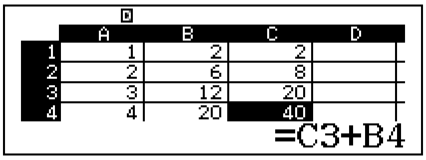
يمكن تمثيل هذه المتوالية، والمتسلسلة المرتبطة بها، في جدول البيانات عبر القيام أولا بإدخال 1 في A1 ثم تولد القيم العشرين الأولى من n وذلك كما جرى القيام به تماما في المتوالية الهندسية أعلاه. ومن ثم أدخل الحد 2 في B1 واستخدم امر تعبئة الصيغة المعروضة في B2 لتوليد الحدود الـ20 الأولى من المتوالية في العمود B؛ إن تعبئة الصيغة مشتقة من خطوة الاستدعاء الذاتي في تعريف هذه المتوالية.



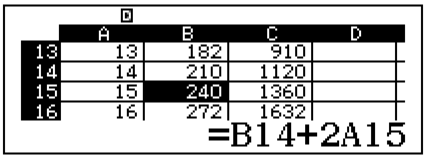
يتم إنشاء المتسلسلة المرتبطة في العمود C كما كان من قبل. ابدأ بإدخال الحد الأول في C1، ثم سيكون كل حد لاحق هو مجموع الحد الجديد و المجموع السابق:







انتقل لرؤية الحد الـ15 في المتوالية وهو $B15 = T_{15} = 240$ والمتسلسلة هي $C15 = S_{14} = 1360$.



بعد أن رأيت الأنماط في جدول البيانات، يمكنك رؤية أن التعريف الصريح هو $Tn = n(n + 1)$.

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك باستخدام الآلة الحاسبة

1. استخدم الآلة الحاسبة للعد بإضافة 3 في كل مرة، مع البدء برقم 10.
2. استخدم الآلة الحاسبة للعد بطرح 10 في كل مرة، مع البدء برقم 97.
3. يكلف كتاب 32$ اليوم. إذا كان يزداد سعره 4% سنويا، أنشئ استدعاء ذاتي لإظهار السعر السنوي. ماذا سيكون الثمن خلال 12 سنة من الآن؟
4. أنشئ حدود المتوالية هذه باستخدام الاستدعاء الذاتي على آلتك الحاسبة.

4، 12، 36، 108، 324، ...

5. استخدم الجدول على آلتك الحاسبة لإدراج الحدود الخمسة الأولى من المتواليات التالية:

a) $T_n = 2n + 1$

b) $g_n = 3 \times 2^n$

c) $t_n = 80\left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) $A_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

6. تملك متوالية حسابية حدا أول هو 12 وفرق مشترك هو 8. استخدم الآلة الحاسبة لعمل جدول للحدود الثلاثين الأولى من هذه المتوالية. ما هو الحد العشرين؟
7. لدينا متوالية هندسية حدها الأول 20 والنسبة المشتركة 0.95. استخدم الآلة الحاسبة لعمل جدول للحدود العشرين الأولى من هذه المتوالية. ما هو الحد العاشر؟
8. قم بتعديل معاملات المتوالية الموصوفة في التمرين 7 لتغيير النسبة المشتركة لـ1.05، ثم اعثر على الحدود الـ25 الأولى من المتوالية. ما هو الحد العاشر؟
9. استخدم المفتاح (⅀▬) لإيجاد مجموع المربعات العشر الأولى $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ...\ + 10^2$.
10. عدل الأمر الذي استخدمته في التمرين 9 للعثور على مجموع المربعات 20 الأولى.

11. استخدم الآلة الحاسبة للعثور على مجموع الحدود العشرة الأولى لكل من
a) 2 + 4 + 8 + ...
b) 0.03 + 0.06 + 0.12 + ...

12. الحد الثاني من متسلسلة حسابية هو 15 والحد الخامس هو 21. أوجد قيمة الفرق المشترك والحد الأول، ثم استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد مجموع الحدود الاثني عشر الأولى.

13. أنشئ جدول بيانات من أجل إيجاد أول عشرين حد من متوالية حسابية 6، 11، 16، 21، ... والمتسلسلة المرتبطة بها. استخدام جداول البيانات للعثور على الحد الثاني عشر ومجموع الحدود الـ14 الأولى.

14. يجري تخزين متوالية في أول 30 خلية من عمود A في جدول بيانات. أعط أمر تعبئة الصيغة الذي سيقوم بتخزين المتسلسلة المرتبطة بها في العمود B.

15. صمم جدولا لتمثيل متوالية: 1، 2، 3، 6، 11، 20، ... فيه كل حد بعد الحد الثالث يكون مجموع الحدود الثلاثة التي قبله. أوجد الحد الـ15 من هذه المتوالية.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. a) أوجد الحد الأول من متوالية 24، 8، $\frac{8}{3}$، $\frac{8}{9}$ والذي هو أقل من 0.001. ما هو هذا الحد؟

b) أوجد المجموع الـ20 لمتسلسلة 11 + 16 + 21 + 26 + ... كم عدد الحدود التي تحتاج إضافتها من أجل أن تتجاوز هذه المتسلسلة 450؟

c) لدى طفل 100 طوبة بناء، ويريد بناء كومة بشكل مثلث حيث قام بوضع طوبة واحدة في الصف الأول، طوبتين في الثاني، ثلاثة في الثالث، وهلم جرا. إذا كان يريد استخدام كل الطوب الذي لديه، كم عدد الصفوف التي سيصل إليها وكم طوبة سيبقى لديه؟

2. أوجد مجموع الأرقام الزوجية التي يمكن تقسيمها على 3 والواقعة بين 400 و500.

(استخدم الجدول من أجل $f(x) = 402 + (x - 1) \times 6$ لإيجاد عدد الحدود، ومن ثم مفتاح (Σ) لإيجاد المجموع).

3. يمثل التعبير $\sum_{1}^{n} x$ مجموع أول n من أعداد العد.

a) اشتق التعابير لإيجاد مجموع أول n عدد فردي وأول n عددزوجي.
b) بين أن مجموع الأعداد الفردية من 1 إلى 55 (شاملة لـ 1 و 55) سيكون مساويا لمجموع الأرقام الفردية بين 91 و 105. (شاملة لـ 91 و 105)

4. عندما يتم إسقاط كرة معينة من ارتفاع 3 أمتار، يستغرق الارتداد الأول 1 ثانية (وهو الفاصل بين اللحظة التي ترتطم فيها الكرة في الأرض لأول مرة، ومن ثم ارتطامها لثاني مرة). ثم بعد ذلك، كل ارتداد لاحق يستغرق 2/3 الوقت الذي سبقه.

أوجد الوقت الإجمالي الذي يستغرقه أول i) 3 ارتدادات ii) 10 ارتدادات iii) 100 ارتداد. بعد كم ثانية في اعتقادك سيتوقف الارتداد؟

5. استخدم مفتاح (Σ) (عبر SHIFT x) أو جدول بيانات للتحقق من المتسلسلة المرتبطة بقوى 2:

1، 2، 4، 8، 16، 32،... (أي 2^0، 2^1، 2^2، 2^3، 2^4، 2^5،...)
هل يمكنك إيجاد طريقة سهلة لتحديد مجموع أول k حد من هذه المتسلسلة؟

6. كما هو موضح في الوحدة رقم 6، يمكن تعريف الدالة الأسية e^x بمتسلسلة لانهائية ملحوظة:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

a) استخدم المفتاح ($\boxed{\Sigma}$) أو جدول البيانات من أجل إيجاد الحدود الثمانية الأولى من إجل e^1. ثم جرب عددا أكبر من الحدود.

b) لا يمكن للآلة الحاسبة إعطاء عدد لانهائي من الحدود، بالتالي ستتوقع النتيجة بشكل تقريبي. ما هي الحدود اللازمة لكي نكون قريبين من e = ...2.718281828؟

c) استخدم المتسلسلة لإيجاد قوى أخرى من أجل e.

ملاحظات من أجل المعلمين

قمنا في هذه الوحدة، بتسليط الضوء على الطرق التي يمكن فيها للطلاب التفكير بالمتواليات والمتسلسلات وكيف ترتبط هذه بفكرة الاستدعاء الذاتي المهمة. قمنا في هذه الوحدة بالاستخدام المكثف لخاصية الاستدعاء الذاتي الداخلية في الآلة الحاسبة إضافة إلى نمط الجدول، والأوامر الخاصة لحساب المتسلسلة. كما تعتبر جداول البيانات مفيدة هنا أيضا. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع هذه المواضيع. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم خبراتهم في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع زميل لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

الإجابات إلى التمارين

1. 10، 13، 16، ... [استخدم $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{=}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{=}$]. 2. 97 ، 87، 77، ... [استخدم $\boxed{9}\boxed{7}\boxed{=}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{=}\boxed{=}$]

3. \$51.23 [استخدم $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{=}\boxed{=}$] 4. استخدم $\boxed{4}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{=}$

5. a) 3, 5, 7, 9, 11 b) 6، 12، 24، 48، 96 c) 40، 20، 10، 5، 2.5 d) 3/2، 5/3، 7/4، 9/5، 11/6

6. $T_{20} = 164$ 7. $T_{10} = 12.605$ 8. $T_{10} = 31.027$

9. $\sum_1^{10} x^2 = 385$ 10. $\sum_1^{20} x^2 = 2870$ 11. a) $\sum_1^{10} 2^x = 2046$ b) $\sum_1^{10} 0.03 \times 2^{x-1} = 30.69$

12. $d = 2$ و$a = 13$ ، $\sum_1^{12} (13 + 2(x-1)) = 288$ 13. $T_{12} = 61, S_{14} = 539$

14. مع T_1 في B1، في الخلية B2: الصيغة=B1+A2، المدى:B2:B30 15. 1، 2، 3 في A1، A2، A3. في A4، الصيغة =A1+A2+A3، T_{15}=4841.

النشاطات

1. تسمح الآلة الحاسبة للطلاب بمعالجة المسائل المتعلقة بالمتواليات والمتسلسلات بشكل مباشر بدلا من حلها جبريا، ولكنهم قد يحتاجون لبعض المساعدة لوصفها باستخدام الآلة الحاسبة. [الإجابات: a) استخدم جدول مع $f(x) = 24 \div 3x$ لإيجاد الحد الـ11 b) استخدم $\Sigma(6 + 5X)$ لرؤية كيف أن هناك حاجة للحدود الـ12. c) استخدم Σx لرؤية كيف أن هناك 13 صفا سيحتاجون 91 طوبة، بالتالي سيكون هناك 9 طوبات من دون استخدام].

2. إن هذا المثال هو أكثر تعقيدا من ذاك في 1 لأنه يتطلب كلا من أمري الجدول والمتسلسلة. قد تختار السماح للطلاب باستكشاف ذلك بأنفسهم في البداية دون التلميح كثيرا؛ على أي حال، فإن المناقشة حول كيفية تمثيل الأعداد الزوجية التى تقبل القسمة على 3 جديرة بالاهتمام. [الإجابة 17 حد، مضافة إلى 7650.]

3. يتطلب هذا النشاط من الطلاب التفكير بكيفية تمثيل حد عام لمتوالية. [الإجابات: a) إذا افترضنا أن المتسلسلة تبدأ مع $x = 1$، فإن التعبيرات المناسبة هي $\Sigma(2x - 1)$ و $\Sigma(2x)$ على التوالي، ولكن هناك حاجة لتعبيرات مختلفة إذا كانت المتوالية تبدأ مع $x = 0$ b) استخدم $\Sigma(2x - 1)$ مع حدود مناسبة لرؤية كيف أن كل مجموع هو 784.

4. يمكن تقريب التطبيقات التي تستخدم متواليات هندسية لانهائية بشكل جيد مع الآلة الحاسبة والتي توفر إحساس جيد فيما يتعلق بمعدل التقارب عبر تجربة حدود نهاية مختلفة. في هذه الحالة، فإن الوقت اللازم لـ x^{th} ارتداد يمكن أن يكون ممثلا على النحو $(2/3)^{x-1}$ والمتسلسلة يمكن الحصول عليها من $x = 1$. إن التقريب الجيد للمجموع إلى مالانهاية يُقدم من خلال أخذ عدد كبير من الحدود.

[الإجابات:i) 19/9 ثانية ii) 2.948 ثانية (iii) 3 ثواني (أساسا المجموع لا نهائي. ويبين جدول أو CALC كيف أن الارتداد الـ 13 يستغرق أقل من 1 على مائة من الثانية، بالتالي يمكن القول بأن الكرة توقفت].

5. شجع الطلاب على تجربة بعض الأمثلة والبحث عن نمط، وذلك ربما من خلال سرد النتائج في الجدول على الورق. إن الحد العام لهذه المتسلسلة هو 2^x، ولكن سيحتاج الطلاب لأن يكونوا حذرين والتأكد من أن الحدود تبدأ بصفر. [الإجابة: مجموع k حدود هو 2^{k-1} الواضح من جدول البيانات].

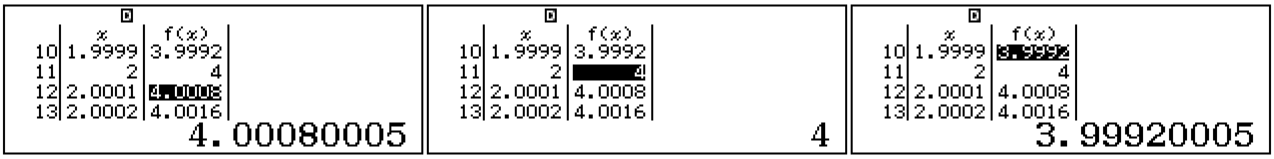
6. إن التعبير للمتسلسلة من أجل e^1 هو $1/x!$ ولكن الطلاب يحتاجون هنا لتوخي الحذر عند البدء بـ $x = 0$ من أجل الكفاءة، تأكد من نقرهم على ◀ لتعديل الأوامر السابقة للحصول على نتائج عديدة متلاحقة. [الإجابات: a) 2.71827877 b) 12 حد كافية للحصول على 2.718281828].

الوحدة 15
حساب التفاضل والتكامل

تعد الآلة الحاسبة ClassWiz مفيدة جدا في تمثيل واستكشاف جوانب عديدة من حساب التفاضل والتكامل التمهيدي. حيث تملك الآلة عدة قدرات تتضمن أنماط الحساب، الجدول و وجداول البيانات. تأكد من أن تعيين الآلة الحاسبة على نمط رياضي/رياضي من أجل كل من المدخلات والمخرجات.

الاتصال والانقطاع

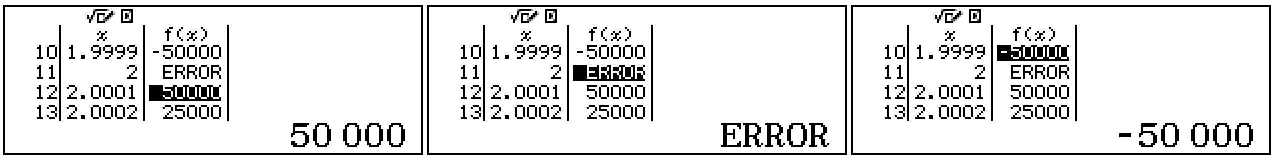
يتعلق حساب التفاضل والتكامل التمهيدي في الغالب بالدوال المتصلة. إحدى الطرق للتفكير بالدوال المتصلة هي أن التغييرات الصغيرة في المتغير ترتبط مع تغيرات صغيرة في الدالة نفسها. يمكنك دراسة هذا على آلتك الحاسبة باستخدام جدول فيه تتغير قيم x بمقدار صغير فقط. هناك مثال في الأسفل من أجل الدالة المتصلة $f(x) = x^3 - x^2$ بالقرب $x = 2$



تقترح الشاشات أن الدالة متصلة عند $x = 2$. يؤدي اختيار فترات أصغر لـ x إلى تغييرات صغيرة في f(x) عندما تكون الدالة متصلة.

لكن، عندما تكون الدالة غير متصلة، سترى أن قيم الدالة ستتغير بشكل كبير وذلك مع أي تغير صغير في المتغير. لنرى المثال التالي في الأسفل.

$x = 2$ من أجل القيم القريبة من $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$



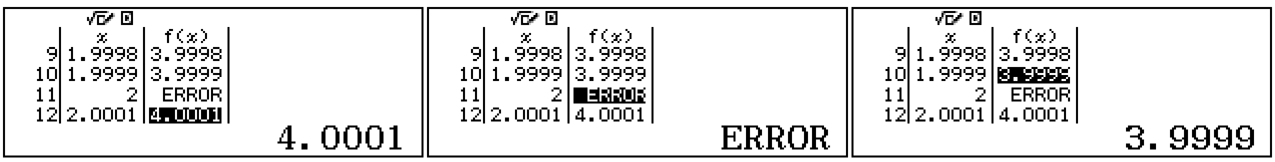
هنا، ستقفز قيم الدالة من $f(1.999) = -50,000$ إلى $f(2.001) = 50,000$ وهي قفزة كبيرة للغاية.

إضافة لذلك، فإن الدالة غير معرفة من أجل $x = 2$ (كما هو موضح بواسطة رسالة الخطأ ERROR). حيث يشير الجدول إلى أن الدالة منقطعة(غير متصلة) عند $x = 2$. (وهو ما يسمى في بعض الأحيان باسم الانقطاع بسبب القفز، وفيه "تقفز" قيم الدالة بشكل كبير من أجل أي تغيير صغير في x).

هناك بعض الدوال غير متصلة بطرق أخرى، على سبيل المثال، انظر للدالة التالية

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

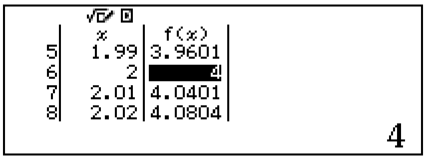
عندما تكون x قريبة من 2، يمكن لجدول القيم أن يسمح لك باستكشاف القيم من أجل هذه الدالة:

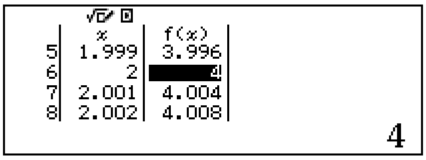


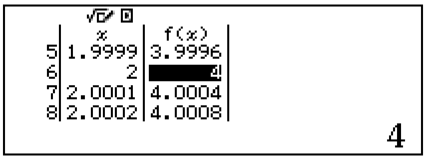
في هذه الحالة، وعلى الرغم من أن الدالة غير معرفة من أجل $x = 2$، فإن القيم من أجل f(x) لا تقفز بشكل كبير على طرفي $x = 2$. إذا قمت بإنشاء جدول للدالة (حتى على فترات أصغر)، ستحدث نفس الظاهرة. في الواقع، بالنسبة لجميع القيم ماعدا $x = 2$، يمكن التعبير عن الدالة على أنها $f(x) = x + 2$. يدعى هذا النوع من الانقطاع أحيانا باسم انقطاع قابل للإزالة حيث يمكن إزالته عن طريق تعريف قيمة مناسبة للدالة عند نقطة. في هذه الحالة، إذا عرفنا $f(2) = 4$، فإن الدالة تكون متصلة.

استكشاف انحدار منحنى

تتعلق الفكرة الرئيسية في حساب التفاضل والتكامل بالتغير. لدراسة كيف تتغير دالة، فإن جدول القيم هو أداة قوية. على سبيل المثال، قم بالنظر للدالة $f(x) = x^2$ عندما تقترب x من 2. تعرض الشاشات الثلاث أدناه كيف جرى استخدام الجداول لدراسة التغيير قرب $x = 2$ وذلك عبر أخذ خطوة أقل في كل مرة. في الجدول الأول، كانت الخطوة هي 0.01، أما الثاني، فكانت 0.001، في حين كانت في الثالث 0.0001





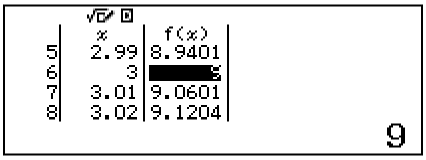


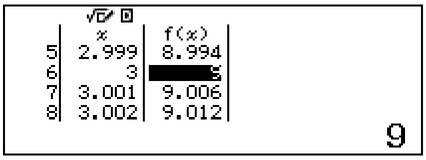
تكمن إحدى الطرق الخاصة بتقريب معدل تغير الدالة f(x) عند x = 2 في النظر إلى التغييرات في قيم y مقسمة على التغييرات في قيم x لهذه الفترات الصغيرة. حيث جرى حساب هذه القيم الثلاث في الأسفل مع استخدام القيم في الجدول:

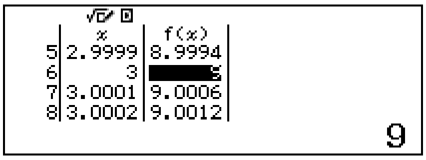
$$\frac{4.0401-3.9601}{0.02}\approx 4 \qquad \frac{4.004-3.996}{0.002}\approx 4 \qquad \frac{4.0004-3.9996}{0.0002}\approx 4$$

مع الدقة المعروضة في هذه الجداول، يكون معدل التغيير هو نفسه في كل مرة، مع تغير قيم f(x) حوالي أربع مرات معدل تغير x. قد تفكر بهذا على أنه خط قريب جدا مع ميل يساوي 4 قرب x = 2.

تتغير هذه الدالة بشكل مختلف في أماكن مختلفة وذلك كما يمكنك أن ترى من خلال الرسم البياني الخاص بالدالة. للتوضيح، انظر في الشاشات أدناه والتي تعرض نفس الدالة $f(x) = x^2$، عندما تكون x قريبة إلى 3.







إن التدرجات المترافقة (التغيرات في قيم y المقسمة على التغييرات في قيم x) هي:

$$\frac{9.0601-8.9401}{0.02}\approx 6 \qquad \frac{9.006-8.994}{0.002}\approx 6 \qquad \frac{9.0006-8.9994}{0.0002}\approx 6$$

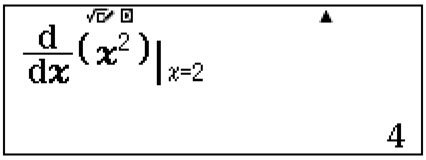
في هذه الحالة، يبدو أن ميل المماس للدالة عند x = 3 قريبا إلى 6. وكما تتوقع، يكون الميل أكبر عندما x = 3 مما هو عليه عندما تكون x = 2، بما أن الرسم البياني أكثر انحدارا في تلك النقطة.

يمكنك الاستمرار في استكشاف ميول المماسات لهذه الدالة من خلال نقاط مختلفة باستخدام جداول بفترات أصغر مع خطوات أصغر فأصغر، وذلك بالرغم من أنه يصبح من الممل جدا القيام بذلك. كلما كانت الفترة أصغر، كلما اقترب الميل أكثر من تمثيل معدل تغير لدالة عند نقطة ما، بالطبع.

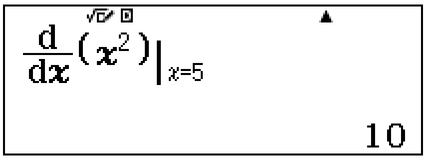
في النهاية، كلما نقص طول الفترة، نعرف ميل منحنى ما عند نقطة ما بمشتقة الدالة عند تلك النقطة، وهو الأمر الذي سنكتشفه في القسم التالي. في حالة الدالة $f(x) = x^2$، سيكون الميل دوما معطى بمشتقة الدالة f(x) = 2x. لاحظ أنه عندما تكون x = 2، سيكون الميل 2x = 4. وعندما x = 3، سيكون الميل 2x = 6.

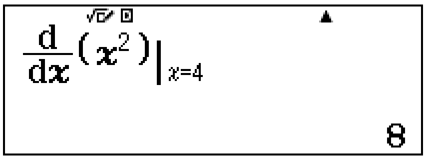
مشتقة دالة

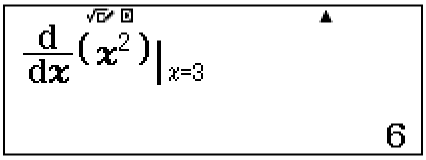
توفر الآلة الحاسبة مفتاح خاص للمشتقة من أجل الحصول على المشتقة العددية لدالة ما عند نقطة ما، بالتالي ليس من الضروري تحليل الدوال بشكل تفصيلي باستخدام قيم مجدولة كما فعلنا في القسم السابق. في نمط عمليات حسابية (ويتم الوصول إليه عبر MENU 1)، يجري استخدام مفتاح الاشتقاق ($\frac{d}{dx}\blacksquare$) (الذي يمكن الوصول إليه باستخدام SHIFT $\int\blacksquare$). من أجل الحصول على مشتق $f(x) = x^2$ عند $x = 2$، ابدأ مع ($\frac{d}{dx}\blacksquare$) ، ثم أدخل صيغة الدالة ثم انقر ▶ لإدخال قيمة محددة من أجل x (في هذه الحالة 2) متبوعة بـ ☰.



ستكون النتيجة هي نفسها التي حصلنا عليها في القسم السابق. وهي المشتقة العددية والذي يوفر قيمة عددية عند نقطة واحدة. والنتيجة العامة، في هذه الحالة $f'(x) = 2x$، غير متوفرة على الآلة الحاسبة. ومن أجل الحصول على تفاضل هذه الدالة من أجل نقاط أخرى، تكون إحدى الطرق الفعالة بالنقر على مفتاح ◀ ومن ثم تعديل الأمر وفقا لذلك. بهذه الطريقة، يمكن أن ترى بشكل سريع قيما متنوعة كتلك الموضحة في الأسفل:

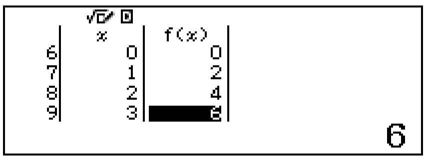


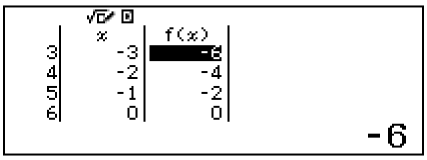


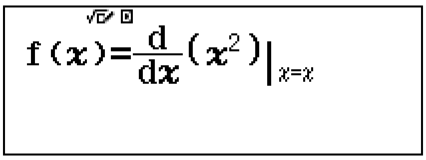


يسمح لك الإشتقاق بفهم ووصف الطريقة التي تتغير فيها الدالة. في هذه الحالة، ومع تزايد x، تتزايد المشتقة، بالتالي تتزايد الدالة بشكل أسرع ويصبح رسمها البياني منحدر بشكل متزايد نحو الأعلى.

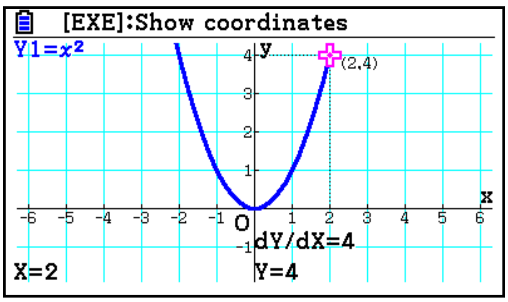
يعتبر الجدول وسيلة مريحة لدراسة العديد من القيم وذلك كما هو مبين أدناه. إذا استكشفت المشتقة للقيم السالبة لـ x، يمكنك أن ترى كيف أن الدالة تتناقص (أي، لديها ميل سالب) بطريقة مشابهة (لهذا السبب تكون متناظرة حول $x = 0$). بالتالي تكون المشتقة عندما $x = 0$ تساوي 0، مما يدل على أن الدالة لا تتزايد ولا تتناقص عند تلك النقطة .







يساعد الحصول على قيم مثل هذه عند نقاط مختلفة على تصور الرسم البياني للدالة، وكيف تتغير، مثلما مبين أدناه (والمنتج بالآلة الحاسبة البيانية CASIO FX-CG20).



في هذه الحالة، يمكن رؤية كيف أن الرسم البياني يمثل قطع مكافئ في الشكل، ومتناظر حول محور y ومع نقطة صغرى هي نقطة الأصل (وهو الأمر المتسق مع الملاحظات التي قمنا بها في الأعلى). لاحظ أن

الرسم البياني هو أشد انحدارا عند النقاط البعيدة عن نقطة الأصل، وذلك لأنه يتغير بشكل أسرع (سلبا وإيجابا على كلا الجانبين). وكما نرى على شاشات الآلة الحاسبة، يكون الرمز الشائع من أجل المشتقة هو dy/dx، ويعرض الرسم البياني كيف أن dy/dx = 4 عندما x = 2، كما ظهر على شاشة الحاسبة في وقت سابق.

خصائص التفاضل(الإشتقاق)

يمكنك استخدام أمر الإشتقاق لاستكشاف بعض خصائص المشتقات من خلال دراسة قيمها العددية.

على سبيل المثال، تشير الشاشات أدناه إلى أن إضافة ثابت لدالة ما لا يؤدي إلى تغيير قيمة التفاضل، حيث لا يتغير تفاضل $f(x) = x^3 – x^2$ عند نقطة محددة (مثلا x = 5) بإضافة ثابت للدالة:

$$\frac{d}{dx}(x^3-x^2)\Big|_{x=5} \quad 65$$

$$\frac{d}{dx}(x^3-x^2+4)\Big|_{x=5} \quad 65$$

$$\frac{d}{dx}(x^3-x^2+11)\Big|_{x=5} \quad 65$$

وبالمثل، ضرب دالة بثابت له نفس التأثير على المشتقة. على سبيل المثال، تبين الشاشات أدناه أن ضرب الدالة $f(x) = x^3$ بـ 7 سيؤدي إلى حصولنا على دالة جديدة هي $f(x) = 7x^3$ لها تأثير ضرب المشتقة عند نقطة معينة بمقدار 7 أيضا:

$$\frac{d}{dx}(x^3)\Big|_{x=2} \quad 12$$

$$\frac{d}{dx}(7x^3)\Big|_{x=2} \quad 84$$

في هذه الحالة نرى كيف أن 7 × 12 = 84 تبين الخاصية. يمكنك محاولة ذلك مع ثوابت أخرى (بدلا من 7) وعند نقاط أخرى (بدلا من x = 2) لمعرفة أن هذه الخاصية صحيحة دائما.

بطريقة مماثلة، فإن مشتقة مجموع دالتين هو مجموع مشتقاتهما. تعرض الشاشات في الأسفل هذا من أجل $f(x) = 2x^2$ و$g(x) = x^5$ عند النقطة x = 2,

$$\frac{d}{dx}(2x^2)\Big|_{x=2} \quad 8$$

$$\frac{d}{dx}(x^5)\Big|_{x=2} \quad 80$$

$$\frac{d}{dx}(2x^2+x^5)\Big|_{x=2} \quad 88$$

إن مشتقة مجموع هاتين الدالتين هو مجموع مشتقاتهما عند النقطة المختارة: 8 + 80 = 88. جرب هذا بنفسك على بعض النقاط الأخرى لترى كيف أن الخاصية بشكل عام صحيحة.

ربما كنت قد لاحظت بأنه من السهل توقع تفاضل الدالة الخطية من ميلها، وذلك بغض النظر عن النقطة المعنية: تملك الدوال الخطية نفس المشتقة عند كل نقطة، وهو ما يعطيها شكلا مميزا على شكل خط. إن المشتقة هي ميل الخط المستقيم.

يمكن التحقق من هذه العلاقة باستخدام أمر التفاضل، كما هو مبين أدناه.

$$\frac{d}{dx}(13x+7)\Big|_{x=8} \quad 13$$

$$\frac{d}{dx}(13x+7)\Big|_{x=19} \quad 13$$

$$\frac{d}{dx}(6-5x)\Big|_{x=-8} \quad -5$$

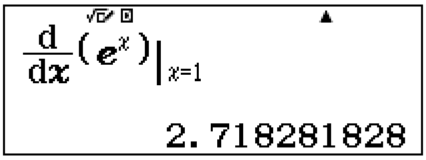
صحيح أن الآلة الحاسبة ClassWiz مقتصرة على إيجاد القيم الرقمية، إلا أنها قادرة على السماح لك بالتحقق بنفسك من العديد من خصائص الدوال ومشتقاتها. بالتالي، قد لا تكون قادرا على حل المسائل بشكل عام،

أو إثبات النظريات حول التفاضل، لكنك ستكون قادرا بنفسك على رؤية آثار كثير من العمليات وحل مسائل عملية متعددة باستخدام التفاضل.

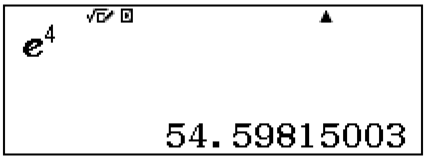
مشتقتان خاصتان

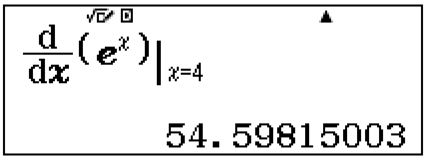
يسمح لنا الإشتقاق بتصور أشكال الرسوم البيانية لكونها تصف كيفية تغير الدالة. وتعتبر مشتقات بعض الدوال مثيرة للدهشة على وجه الخصوص.

على سبيل المثال، انظر للدالة الأسية التي تم تقديمها في الوحدة 6: $f(x) = e^x$. يظهر مشتق الدالة عند $x = 1$ أدناه:



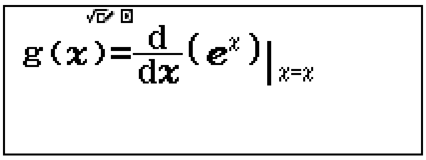
لعلك أدركت أن هذه القيمة ...2.718281828 هي قيمة e نفسها. بالتالي، عندما $x = 1$، سيكون تفاضل الدالة $f(x) = e^x$ هو نفس قيمة الدالة. ولكن تتوالى المفاجآت مع الشاشة التالية من أجل قيمة أخرى لـ x ($x = 4$):



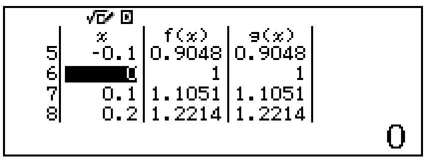


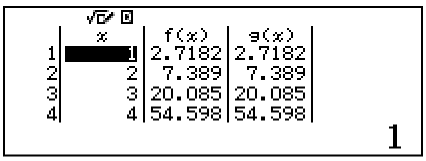
من جديد، يكون مشتق هذه الدالة مساويا لقيمة الدالة. جرب هذا بنفسك من أجل قيم أخرى لـ x لرؤية كيف أن الدالة الأسية تملك علاقة غير عادية بين الدالة والتفاضل الناتج عنها.

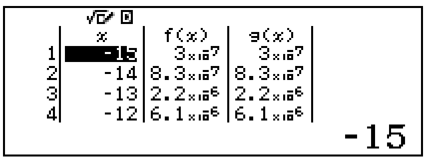
يمكنك التحقق من هذه الخاصية مع القيم الأخرى بكفاءة عبر جدول عادي أو جداول بيانات. في الجدول أدناه على سبيل المثال، لدينا $f(x) = e^x$ و$g(x) = d/dx\ (f(x))$:



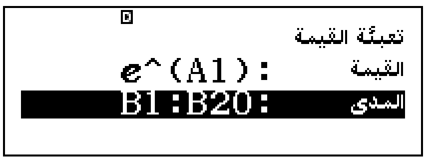
بغض النظر عن قيم x، لاحظ أن $f(x) = e^x$ وأن مشتقها $g(x)$ يملكان نفس القيمة:

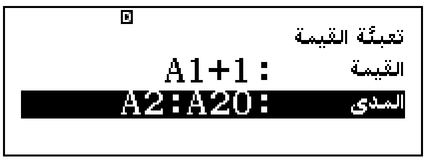






لدراسة التفاضل مع جداول بيانات، استخدم العمود A من أجل x، والعمود B من أجل $f(x) = e^x$ والعمود C لمشتقة $f(x)$، للحصول على:





(ليس من الضروري هنا استخدام تعبئة الصيغة ومقدار ذاكرة أقل نحتاجها من أجل تعبئة القيمة. يستهلك جدول البيانات أدناه حوالي نصف المساحة المتاحة). لاحظ خصوصا أن تعبئة الصيغة في العمود C (والذي

يمكن رؤيته أدناه) يملك شكلا مختلفا (باستخدام فاصلة) من نسخة العرض الطبيعية للتفاضل. وتعرض الشاشات التالية بعض القيم من جدول البيانات.

	A	B	C	D
1	-10	4.5×10^{-5}	4.5×10^{-5}	
2	-9	1.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	
3	-8	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	
4	-7	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	

=d/dx(e^(x),A1)

	A	B	C	D
12	1	2.7182	2.7182	
13	2	7.389	7.389	
14	3	20.085	20.085	
15	4	54.598	54.598	

=d/dx(e^(x),A15)

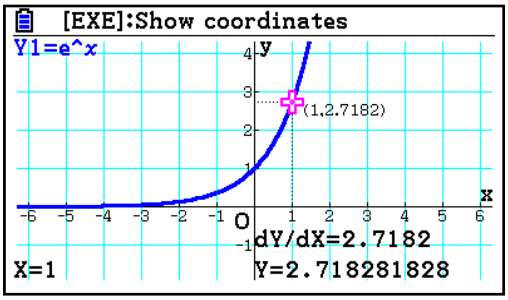
	A	B	C	D
17	6	403.42	403.42	
18	7	1096.6	1096.6	
19	8	2980.9	2980.9	
20	9	8103	8103	

=d/dx(e^(x),A20)

في الواقع، فإن كلا من الجدول العادي وجدول البيانات يشيران إلى أن العلاقات تنطبق على كل القيم من أجل الدالة $f'(x) = e^x$. يمكننا استخدام هذه الملاحظة لتخيل ما قد يبدو عليه المخطط البياني لدالة.

وعلى اعتبار أن قيمة e^x دوما موجبة، تسمح لنا هذه الملاحظة حول التفاضل بأن نستنتج بأن الدالة تتزايد دوما. وبما أن قيم e^x تكبر مع تزايد قيم x، بالتالي فإن الدالة الأسية $f(x) = e^x$ تستمر في التزايد بمعدل تزايد أكثر من أي وقت مضى مع تزايد x، وهذا يعد الفكرة الأساسية للنمو الأسي، والتي رأيناها في الوحدة 6.

يتوافق الرسم البياني للدالة الأسية هنا، المولد عن طريق الحاسبة CASIO FX-CG20 مع هذه الملاحظات.



ذات صلة مع الدالة الأسية، مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية التى تعطي نمط مثير للاهتمام. انظر بعناية في الشاشات الثلاثة أدناه لرؤية جزء من هذا النمط.

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=2} \quad 0.5$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=5} \quad 0.2$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=4} \quad 0.25$$

يبدو بأن مشتق دالة $f(x) = 1n\ x$ هو مقلوب قيمة x.

للتحقق من هذه الخاصية، إليك ثلاثة أمثلة أخرى:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=10} \quad 0.1$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=0.5} \quad 2$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big|_{x=100} \quad 0.01$$

تتبع هذه الأمثلة نفس النمط الذي يدل على أن مشتق $1n\ x$ هو $1/x$. لرؤية مزيد من القيم بكفاءة، يعد كلا من الجدول وجدول البيانات أدوات مفيدة أيضا.

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	0.5		
3	3	0.3333		
4	4	0.25		

=d/dx(ln(x),A1)

	A	B	C	D
19	19	0.0526		
20	20	0.05		
21	21	0.0476		
22	22	0.0454		

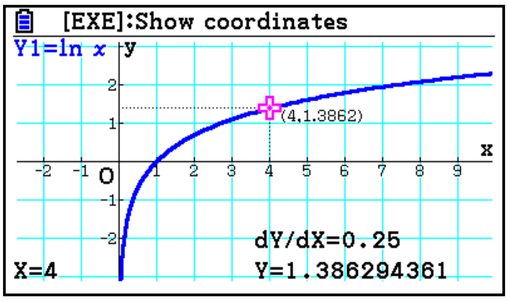
=d/dx(ln(x),A20)

	A	B	C	D
39	39	0.0256		
40	40	0.025		
41	41	0.0243		
42	42	0.0238		

=d/dx(ln(x),A40)

تقترح ملاحظات مثل هذه حول قيم المشتقة إلى أن مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو دائما موجب، سوف يساعدنا هذا على تخيل لما سيبدو عليه الرسم البياني.

عندما x تكون قيمة صغيرة (مثل x = 0.01)، ستكون قيمة المشتقة موجبة وكبيرة، وبالتالي سيكون الرسم البياني حادا جدا. ومع تزايد x، ستبقى المشتقة موجبة ولكن ستتناقص وتصبح سريعا قريبة من الصفر (لكن ليس صفرا)، بالتالي سيتوقع من الرسم البياني للدالة f(x) = 1n x أن يتسطح سريعا بعد انحدار حاد في البداية.



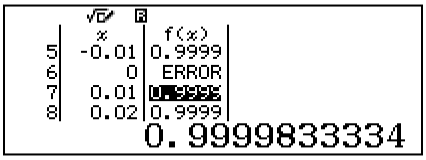
ويتوافق الرسم البياني الموضح هنا، والمولد من قبل الآلة الحاسبة CASIO FX-CG20 مع هذه التوقعات.

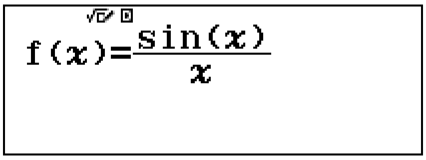
استكشاف النهايات

هناك فكرة مهمة في حساب التفاضل والتكامل تتعلق بنهاية الدالة. يمكن استكشاف قيم النهاية لبعض الدوال على آلتك الحاسبة باستخدام جدول القيم. مثال جيد على هذا هو الدالة التالية.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

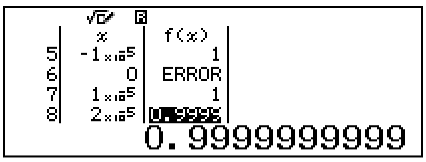
مع اقتراب x من الصفر. لاحظ أن الدالة لا يمكن تحديدها عندما x = 0 على اعتبار أن كلا من البسط والمقام هما صفر والقسمة على صفر غير معرفة. من أجل استكشاف هذه النهاية، يمكننا إنشاء جدول قيم مع اقتراب x من الصفر. تأكد من أن الآلة تستخدم وحدة قياس الزاوية الراديان. عرف الدالة في نمط الجدول ومن ثم قم بإيجاد قيمها بالقرب من الصفر:

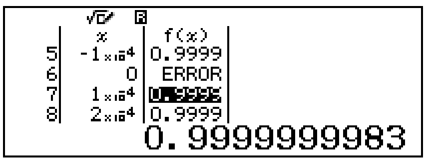


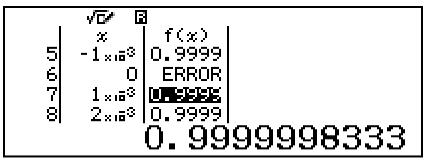


تعرض الشاشة أعلاه كيف أن الدالة غير معرفة من أجل x = 0، ولكن يبدو بأنها تملك قيمة قريبة من 1 من أجل قيم x القريبة من الصفر.

للنظر في حالة النهاية عن قرب، اختر فترات أصغر بشكل متزايد عن طريق تعديل إعدادات الجدول وتنقل بين القيم من أجل مراقبة كيف تتغير. تعرض الشاشات في الأسفل كيف أنه مع اقتراب x بشكل كبير من الصفر (يعني، عندما تكون "الخطوة" صغيرة جدا)، ستصبح قيمة الدالة قريبة جدا من 1. لاحظ أن كل جدول يعطي خطأ من أجل f(0) والذي هو غير معرف.





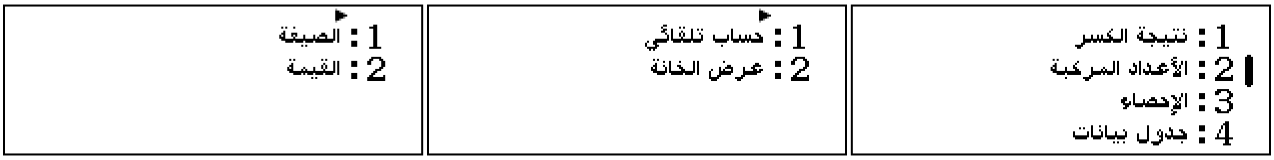


وبالفعل، في الشاشة الأخيرة، تعرض الآلة الحاسبة قيم في الجدول نفسه تعطي f(x) = 1 وذلك كتقريب للقيمة الأصلية (وهي ليست تماما 1).

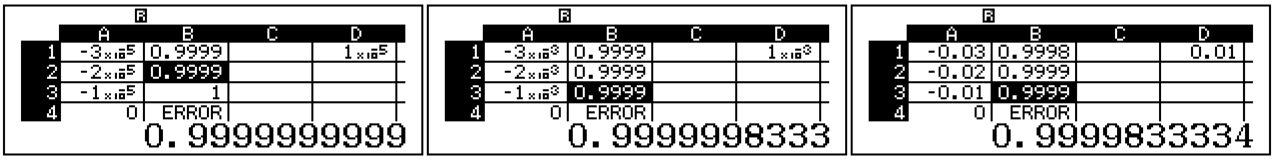
طريقة أخرى لاستكشاف النهاية من هذا النوع يتمثل في استخدام جداول البيانات. بدلا من التغيير المستمر في الخطوة في الجدول، يمكنك تصميم جدول بيانات يسمح لك بتغيير الخطوة بسهولة أكبر. لاحظ أن

الخطوة مخزنة في الخلية D1 وصيغ التعبئة في الخليتين A1 و A2 تستخدم العنوان المطلق. (إن علامات $ متوفرة في (OPTN) (1)). بالتالي، يسمح لك تغيير القيمة D1 بالحصول على قيم من أجل x في العمود A تقترب أكثر وأكثر من 0 وبمعاينة قيمة الدالة في العمود B.

أخيرا، تعد فكرة جيدة تغيير إعداد عرض الخانة ضمن شاشة SET UP من أجل إظهار خيار القيمة بدلا من الصيغة، وهو الأمر الذي يسمح لك برؤية المزيد من القيم الدقيقة أكثر مما يسمح به عمود جدول البيانات:



إليك بعض نتائج استخدام جدول البيانات هذا، وذلك عبر تعديل القيمة في D1 من أجل الاقتراب أكثر وأكثر من الصفر. (ستلاحظ في كل مرة تقوم بهذا، سيقوم جدول البيانات بعرض رسالة خطأ بسبب القسمة على صفر في الخلية B4. اضغط (AC) للمضي قدما لرؤية جدول البيانات).



تنقل عبر الجدول لرؤية كيف تتغير قيم الدالة على جانبي x = 0. لاحظ مرة أخرى كيف تعطي الآلة الحاسبة القيمة 1 في نهاية المطاف وذلك كأفضل تقريب للنتيجة والتي هي أقل قليلا من 1.

نقترح أن تقوم بتغيير إعدادات عرض الخانة من جديد لخيار الصيغة عندما تنتهي.

في المصطلح الرياضي لحساب التفاضل والتكامل، يبين الجدول وجدول البيانات النتيجة المهمة التالية.

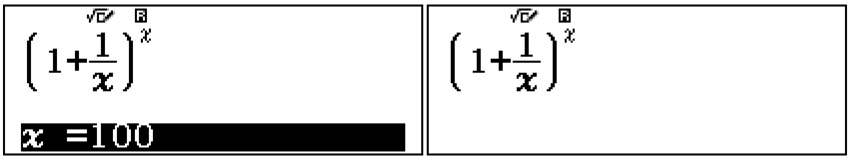
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

يمكن استكشاف نهايات أخرى على الآلة الحاسبة بطرق مختلفة. على سبيل المثال، فإن فكرة النهاية عند ما لانهاية تتعلق بالقيمة التى تؤول لها قيم الدالة مع تزايد المتغير من دون حدود. ولكونه من غير الممكن إدخال قيم لانهائية في الدوال، يمكن الحصول فقط على تقريبات جيدة.

قم بالنظر للدالة المستخدمة في الوحدة 6 من أجل وصف نواحي النمو الأسي:

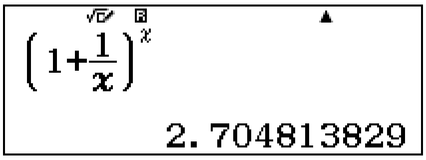
$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

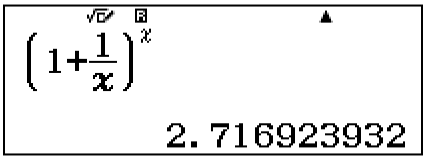
لمعاينة النهاية التي تقترب منها هذه الدالة مع تزايد x بشكل لانهائي، يمكننا إيجاد قيم الدالة من أجل قيم كبيرة للمتغير x. هناك طريقة جيدة للقيام بذلك هي بتحديد أولا الدالة في نمط الحساب ((MENU) (1)) كما هو موضح في الطرف الأيمن أدناه (مع الحرص على عدم نقر على (=)):

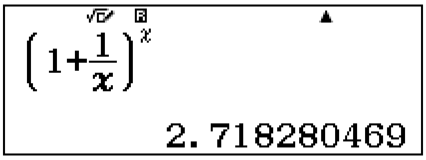


لإيجاد قيم الدالة مع تزايد x، استخدم أمر CALC واختر قيمة من أجل x ثم انقر على = لإيجاد قيمة الدالة. انقر على CALC من جديد للمتابعة.

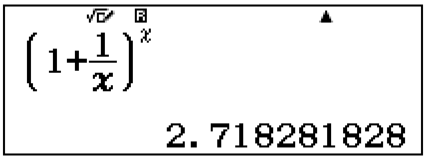
قم بذلك مرارا وتكرارا، اختر قيم كبيرة وبشكل متزايد من أجل x، وذلك من أجل رؤية عملية النهاية وهي تعمل. وتعرض القيم x = 100 ، x = 1000 و x = 1 000 000 على التوالي:







تملك الآلة الحاسبة حدا عمليا لسعة الشاشة، لكن ما يزال بإمكانك استخدام عمليات مثل هذه للحصول على تقريب جيد للنهاية عند ما لانهاية. في هذه الحالة، فإن قيمة x = 10 000 000 000 تعطي قيمة قريبة جدا من النهاية كما ستسمح به الشاشة:



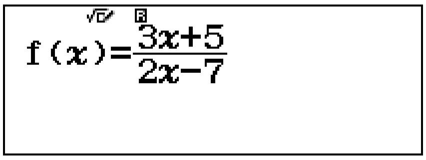
بالطبع، هناك حاجة لبراهين رياضية من أجل تعيين النهاية، وعشرة مليار أصغر بكثير من ∞، ولكن يمكن للآلة الحاسبة عرض تقريب عددي جيدة لهذه الأنواع من الطرق. في هذه الحالة، تعكس الشاشة في الأعلى نتيجة رياضية مهمة للغاية:

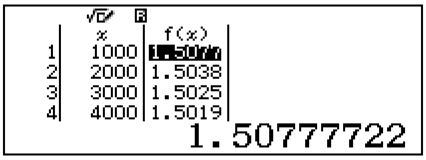
$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

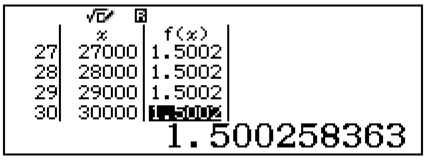
إضافة إلى استخدام الخاصية CALC ، يمكن استكشاف النهاية عند ما لانهاية باستخدام جداول البيانات أو جداول القيم. اختر قيم كبيرة جدا لحدود الجدول (وأيضا خطوة كبيرة لضمان أن الجدول لا يملك عدد كبير من العناصر). لشرح هذه العملية، ادرس إيجاد النهاية عندما تؤول x إلى ما لانهاية للمقدار الكسري:

$$\frac{3x+5}{2x-7}$$

في وضع الجدول، عرف الدالة التى تقوم بتقييم هذا التعبير وإنشئ جدول قيم مع قيم كبيرة من أجل x. على سبيل المثال، تعرض الشاشات أدناه قيمة "بداية" و"خطوة" مقدارهما 1000 وقيمة "نهاية" مقدارها 30,000:

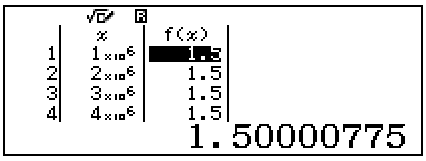


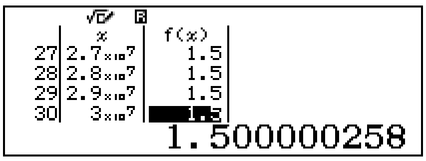




يشير هذا الجدول إلى أن النهاية قريبة من 1.5.

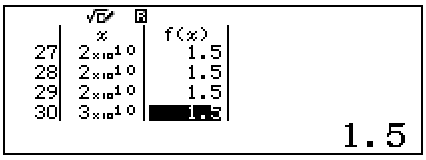
يقترح اختيار قيم أكبر لمعاملات الجدول (مليون من أجل الخطوة) نفس النتيجة، ولكن أكثر وضوحا، وذلك كما هو مبين أدناه:

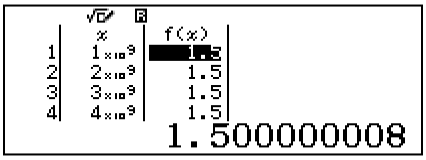




لاحظ أن القيم المدرجة في الجدول كلها معروضة على الشاشة أنها على 1.5 وذلك بسبب سعة الشاشة، ولكن القيمة الفعلية هي أكبر بقليل من هذه، كما هو موضح في نهاية كل شاشة.

وأخيرا، تعرض الشاشة أدناه نتيجة استخدام خطوة مقدارها مليار في الجدول، والذي يقترح بدوره وبشكل أكثر وضوحا بأن قيمة النهاية هي فعلا 1.5. في هذه الحالة، يعرض أسفل الشاشة أيضا المقدار 1.5 وذلك بسبب دقة الشاشة، ولكنه في الواقع هو أكثر قليلا من ذلك.





لا تعتبر نتيجة الآلة الحاسبة إثباتا، بطبيعة الحال، لكن النتيجة تتفق مع العبارة التالية والتي يمكن برهنتها رياضيا:

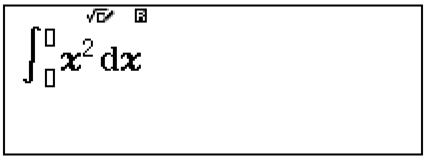
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x-7}=\frac{3}{2}$$

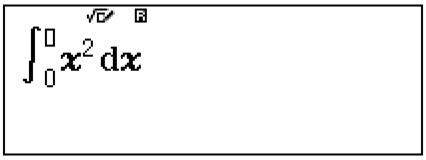
التكامل كمساحة تحت منحنى

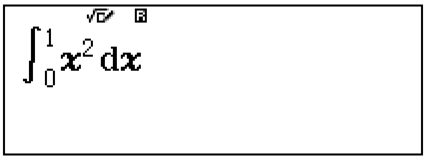
إضافة إلى التفاضل، يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد القيمة العددية للتكاملات المحددة عبر استخدام مفتاح . ويعتبر هذا مفيدا في العديد من السياقات العملية ويمكن النظر إليه على أنه إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة وفوق محور x.

لإيجاد التكامل عدديا، ابدأ مع مفتاح ثم أدخل على التوالي الدالة (باستخدام المتغير x) والحدين الأدنى والأعلى ومن ثم انقر على (أو) بين الحدين.

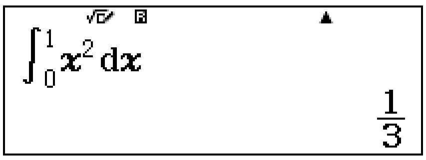
وتعرض الشاشات التالية الخطوات الثلاث المتتالية للعثور على المساحة تحت منحنى $f(x) = x^2$ وفوق المحور x بين $x = 0$ و $x = 1$.







بعد إدخال الحد الأعلى، اضغط لإيجاد التكامل والذي في هذه الحالة معطى كقيمة دقيقة (على غير العادة) أدناه:

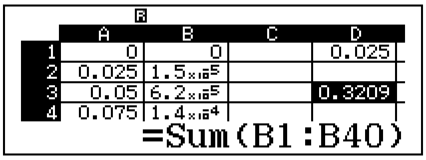


إن هذا هو التقريب العددي للمساحة (ويفسر هذا لم تستغرق الحاسبة بعض الوقت لحساب التكاملات). لفهم ما الذي يجري حسابة، قم بالنظر لجدول البيانات أدناه من أجل تقريب مجموع ريمان لهذه الدالة. في العمود A، جرى تقسيم الفترة بين 0 و 1 لـ40 جزء متساوي مع A1 = 0 وA41 = 1 حيث يملك كل جزء نفس العرض، معروضة في الخلية D1. يحوي العمود B المساحات والتي تحوي 40 مستطيل رقيق تحت المنحنى؛ كل منها لديه عرض مقداره D1. يعطي إضافة هذه المساحات المساحة التقريبية تحت المنحنى.

هناك عدة طرق لإيجاد مساحات هذه المستطيلات، وذلك اعتمادا على الكيفية التي جرى تشكيلها فيها. احد هذه الاحتمالات استخدام المجموع الأدنى، والذي فيه ارتفاع كل مستطيل هو قيمة الدالة على النهاية

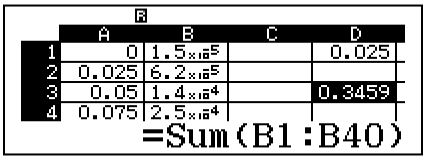
اليسرى للفترة، وهو الأمر الذي يعني بأن كل مستطيل هو أسفل المنحنى. وتكون الصيغة المستخدمة هنا هي صيغة مساحة المستطيل. لاحظ أنه من أجل هذه الدالة، فإن $A1^2$ هو ارتفاع المستطيل الأول بالتالي فإن صيغة تعبئة القيمة تستخدم $A1^2x\$D\$1$ من أجل هذه المساحة.

إن المساحة الكلية هي مقربة (في الخلية D3) عبر إضافة كل المساحات الصغيرة في العمود B. قم بدراسة الشاشات أدناه والتي تقدم معلومات كافية من أجلك لتجربة هذا بنفسك.

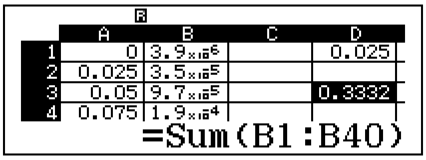


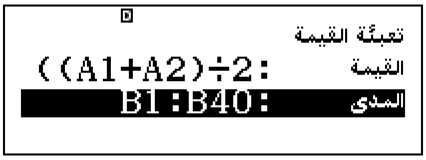
يعطينا جدول البيانات ناتج تقريبي للمساحة 0.3209 في D3. كما هو متوقع، فإن القيمة صغيرة نوعا ما.

أما الاحتمال الآخر فهو استخدام المجموع الأعلى، والذي فيه كل مستطيل يملك ارتفاعا مساوٍ لقيمة الدالة عند النهاية اليمنى من الفترة، وهو ما يعني أن كل مستطيل هو/*أعلى* المنحنى. لاحظ أنه من أجل هذه الدالة، ستكون $A2^2$ هي ارتفاع المستطيل الأول بحيث يستخدم صيغة تعبئة القيمة $A2^2x\$D\$1$ من أجل المساحة. يمكنك تعديل جدول البيانات السابق عن طريق تغيير صيغة تعبئة القيمة في B1 من أجل استخدام هذه الطريقة حيث ستكون القيمة الناتجة هي 0.3459 وهي كبيرة جدا نوعا ما.



ويعد الاحتمال الأفضل استخدام ارتفاع يساوي ارتفاع الدالة $f(x) = x^2$ في *نقطة المنتصف* الخاصة بالفترة. وتكون الصيغة المستخدمة هي صيغة مساحة المستطيل. أي أن (A1 + A2)/2 ستكون نقطة المنتصف من أجل الفترة: $((A1 + A2)/2)^2X\$D\$1$. أيضا، يمكنك تعديل جداول البيانات السابقة للقيام بذلك.

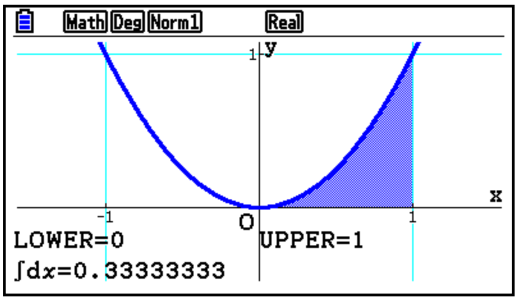




إن نتيجة 0.3332 التي جرى الحصول عليها هي بين المجموع الأدنى والمجموع الأعلى وهي أقرب إلى قيمة 1/3 التي تنتجها الآلة الحاسبة.

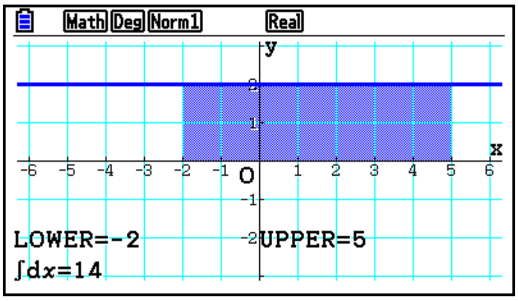
لاحظ أن كل فترة من الفترات في العمود B يمثل قيمة صغيرة للغاية من أجل كل طريقة. ويمكن الحصول على تقريب أفضل في حال جرى استخدام فترات أصغر، ولكن حدود جدول البيانات هي 45 صف. بالتالي فإن المجال التقريبي المعطى من قبل جداول البيانات هو مختلف قليلا عن رقم 1/3 المعطى من قبل آلة ClassWiz الحاسبة، ولكن هذا بسبب أن الآلة الحاسبة تستخدم عدد أكبر من الفترات بدلا من 40 وتقوم بصقل النتيجة حتى الوصول إلى نتيجة مستقرة.

لفهم ما جرى إيجاده من قبل هذا الحساب، من المفيد رؤية ذلك من خلال الرسم. تعرض الشاشة أدناه من الآلة الحاسبة CASIO FX-CG20 رسما بيانا للمساحة المظللة تحت منحنى $f(x) = x^2$ مع حساب المساحة.



يتضح من الرسم البياني أن قياس المساحة هذا لا يعتبر منطقيا بصريا لكونه يشغل أقل من نصف مربع الوحدة التي يقع فيها.

وفي مثال آخر، تعرض الشاشة في الأسفل تكامل دالة ثابتة f(x) = 2 من أجل x = -2 إلى x = 5 حيث نرى كيف أن هذه المنطقة هي مستطيلة الشكل مؤلفة من 7 وحدات طول و2 وحدة ارتفاع، ما يعني أن المساحة تساوي 14 وحدة مربعة.



على الآلة الحاسبة، يجري الحصول على النتيجة المكافئة بشكل سهل:

يوضح مثال المستطيل كيف يسمح لك أمر التكامل باستكشاف مساحات أشكال معرفة بواسطة دوال. أشكال أخرى أكثر تعقيدا من شكل المستطيل يمكن إيجادها.

على سبيل المثال، ارسم منحنى بياني بنفسك من أجل رؤية أن المساحة فوق المحور x وتحت الخط المعطى بالمعادلة f(x) = x + 1 بين x = 1 و x = 4 تمثل شبه منحرف.

ويمكن تحديد مساحة شبه المنحرف عن طريق تكامل كما هو مبين أدناه:

يتضمن المثال الأكثر تعقيدا أشياء دائرية. أيضا، ارسم منحنى بياني بنفسك لترى كيف أن المنطقة تحت الدالة التالية بين x = -2 و x = 2 تشكل نصف دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

وذلك لأن العلاقة $x^2 + y^2 = 4$ تحدد دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل. وتعطى مساحة نصف الدائرة عن طرق التكامل الموجود في الأسفل. ستلاحظ كيف أن هذه النتيجة تستغرق عدة ثوان للظهور، وذلك مع احتياج الآلة الحاسبة إجراء العديد من العمليات الحسابية من أجل الحصول على الدقة الكافية، وذلك عبر استخدام إجراء تكراري:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$6.283185307$$

سوف تتعرف على أن هذه المساحة تساوي 2π، وبالتالي فإن مساحة الدائرة بأكملها هو 4π، وهو ما يؤكد العلاقة بأن مساحة الدائرة هو π مضروبا بمربع نصف قطرها.

لدى إيجاد عملية التكامل عدديا، يجب الانتباه إلى أن المساحة التي يجري حسابها هي مساحة موجبة. ويعني هذا، أن المساحة تحت المحور x الأفقي تعتبر سالبة. ولأجل هذا السبب، من الحكمة دوما رسم مخطط رسومي للدالة قبل تأويل تكامله. من أجل فهم هذه الفكرة، تحقق من الأمثلة التالية بعناية عبر رسم منحنياتها بنفسك:

$$\int_{-4}^{4}x^3\,dx \qquad 0$$

$$\int_{0}^{2\pi}\sin(x)\,dx \qquad 0$$

$$\int_{0}^{5}4-x\,dx \qquad \frac{15}{2}$$

لإيجاد المساحة بين المحور x والمنحنى، استخدم دالة القيمة المطلقة والتي ستجعل قيم المناطق الواقعة تحت المحور موجبة، وذلك كما يوضح المثال التالي:

$$\int_{0}^{2\pi}|\sin(x)|\,dx$$
$$4$$

رؤية أخرى للتكامل

من الطرق الأخرى للتفكير في التكامل هي عبر النظر إلى الدوال الداخلة فيه. من أجل القيام بذلك، يمكننا دراسة التكامل من 0 إلى قيمة أخرى لـ x. ويعد نمط الجدول مفيدا هنا:

$$f(x)=\int_{0}^{x}x^2\,dx$$

$$g(x)=\frac{x^3}{3}$$

مدى الجدول
البداية :0
النهاية :2
الخطوة :0.1

تعرض المقتطفات من الجداول أدناه كيف أن التكامل (في عمود f(x)) يساوي الدالة (في العمود g(x)) وهو ما يساعد على الصلة بين التكامل والنتيجة.

	x	f(x)	g(x)
1	0	0	0
2	0.1	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
3	0.2	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}
4	0.3	9×10^{-3}	9×10^{-3}

0

	x	f(x)	g(x)
10	0.9	0.243	0.243
11	1	0.3333	0.3333
12	1.1	0.4436	0.4436
13	1.2	0.576	0.576

$\frac{1}{3}$

	x	f(x)	g(x)
19	1.8	1.944	1.944
20	1.9	2.2863	2.2863
21	2	2.6666	2.6666
22			

$\frac{8}{3}$

ويبدو في هذه الحالة أن $\int_0^x f(x)dx = g(x)$. إضافة لذلك، فإن f(x) هي مشتقة g(x). ويعني هذا g′(x) = f(x). ويوضح هذا أنه يمكن التعامل مع عملية إيجاد تكامل f(x) عبر إيجاد الدالة التي مشتقها هو f(x). ويدعى هذا عادة الدالة الأصلية للدالة f(x).

إذا لم يبدأ التكامل المحدود بـ 0، سيكون الوضع أكثر تعقيدا نوعا ما. قم بدراسة المثال أدناه، والذي فيه يبدأ التكامل المحدود بـ 2، وناقش ذلك مع آخرين. لاحظ مرة أخرى أن العمودين في الجدول لديهما قيم متطابقة.

$$f(x)=\int_2^x x^2\,dx$$

$$g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}$$

	x	f(x)	g(x)
9	2.8	4.6506	4.6506
10	2.9	5.463	5.463
11	3	6.3333	6.3333
12	3.1	7.2636	7.2636

19⌟3

يقترح الجدول أن $\int_2^x f(x)dx = F(x)-F(2)$ حيث $F(x)=\frac{x^3}{3}$، هو الدالة الأصلية من أجل f(x). بالتالي يمكننا التنبؤ، لنقل،

$\int_3^7 f(x)\,dx = F(7)-F(3)=\frac{7^3}{3}-\frac{3^3}{3}=\frac{316}{3}$ ، هذا التنبؤ صحيح:

$$\int_3^7 x^2\,dx \qquad \frac{316}{3}$$

تمارين

إن الهدف الرئيسي من هذه التمارين هو مساعدتك على تطوير مهاراتك في استخدام الآلة الحاسبة.

1. a) تملك الدالة $f(x)=\frac{x-3}{5x-4}$ انقطاعا في الفترة 1 ≥ x ≥ 0. استخدام جدول القيم لتحديد موقع الانقطاع(عدم الإتصال).

b) هل هذا الانقطاع هو إنقطاع قفز أو قابل للإزالة ؟

2. a) أنشئ جدول قيم من أجل الدالة f(x) = 2x + 5 من أجل 10 ≥ x ≥ 10- وخطوة 1.

b) كيف يمكن استخدام هذا الجدول من أجل وصف معدل التغيير في الدالة؟

c) استخدام الجدول لإيجاد مشتقة الدالة عند x = 7.

3. استخدام آلتك الحاسبة للحصول على مشتقات عددية للدوال التالية عند القيمة المعطاة لـx:

a) $f(x) = x^2 + 2$ عند $x = 3$

b) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$ عند $x = -1$

c) $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$ عند $x = 5$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ عند $x = 1$

e) $f(x) = \ln x$ عند $x = 4$

4.a) استخدام جدول القيم لإيجاد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

(b) استخدام الأمر CALC لإيجاد $\lim_{x\to\infty}\frac{5-4x}{2x+3}$

5. أوجد قيم المشتقات العددية:

أ) من أجل $f(x) = x^2 + 3$ عندما $x = -0.5$، $x = 0$ و $x = 0.5$.

ب) من أجل $f(x) = x^2 - 5$ عندما $x = -0.5$، $x = 0$ و $x = 0.5$.

تنبأ بقيم مشتقة $f(x) = x^2 + 200$ عند هذه القيم نفسها وتحقق من التنبؤ الخاص بك مع الآلة حاسبة.

6. استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد التكاملات العددية التالية:

a) $\int_0^1 x^2 dx$ b) $\int_2^5 (3x-1)dx$ c) $\int_1^5 (-x^2+4x+1)dx$

d) $\int_{-1}^4 (x^3-5x^2+2x+8)dx$ e) $\int_{-1}^2 (x^3-5x^2+2x+8)dx$ و $\int_2^4 (x^3-5x^2+2x+8)dx$

7.a) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$، والمحور x من $x = -1$ إلى $x = 4$. قارن إجابتك مع التمارين 6. d) و 6. e).

b) أوجد جدول قيم من أجل f(x) من أجل $x = -1$ إلى $x = 4$ وخطوة 0.2.

c) استخدم جدولك لوصف التغيرات التي طرأت على الدالة بين -1 و 4.

d) ارسم مخطط بياني f(x) من $x = -1$ إلى $x = 4$.

نشاطات

الهدف الرئيسي من هذه النشاطات هو مساعدتك على استخدام آلتك الحاسبة من أجل تعلم الرياضيات. قد تجد أن بعضها متقدم جدا عليك. تجاهلها حتى تتعلمها لاحقا.

1. يسمح جدول القيم لك أن ترى كيف يمكن لقيم دالة f(x) أن تتغير مع تغير x. بالنسبة للدالة الخطية، التغير هو نفسه بالنسبة لكل فترة.

a) ارسم جدول $f(x) = x^2$، من أجل $1 \le x \le 10$ مع خطوة هي 1 من أجل تأكيد أن f هي *ليست* دالة خطية.

b) قم برسم الدالة من جديد من أجل فترات أصغر مثل $1 \le x \le 1.001$ مع خطوة 0.0001؛ لاحظ أن الدالة هي تقريبا خطية في هذه الفترة.

c) جرب فترات أصغر من أجل رؤية أن الدالة هي تقريبا خطية مع فترات صغيرة.

d) جرب هذه الفكرة مع دوال أخرى غير خطية.

2. تود شركة أدوية إنتاج حاويات معدنية إسطوانية مغلقة رقيقة بحجم 25 سم^3 باستخدام الحد الأدنى من المعدن. إذا كان نصف القطر الداخلي للحاوية هو r سم ومساحة السطح الخارجية هي S سم^2، برهن أن $S = 2\pi r^2 + \dfrac{50}{r}$.

استخدم الجدول والمشتقات العددية لإيجاد قيمة r من أجل أقل مساحة للسطح.

3. بدأ مجمع سكني بتعداد سكان مؤلف من 500 نسمة.

a) كان من المخطط أن يتزايد السكان P وفقا للنموذج $P = 500 + 100t$. ما هو المعدل المتوقع لتغير السكان كل عام؟

b) لم ينمو السكان كما كان مخططا له حيث وُجد أن النموذج الأفضل هو $P = 100(5 + t – 0.25t^2)$

i) ما عدد السكان بعد سنة ، سنتين ، ثلاث سنوات؟

ii) ما معدل تغير السكان بعد سنة ، سنتين ، ثلاث سنوات ؟

iii) ماذا حدث للمجمع السكني؟

4. يمكن استخدام مشتقة الدالة من أجل استكشاف منحنى الدالة بالقرب من نقطة التحول. a) على سبيل المثال، انظر في القطع المكافئ المعطى بالعلاقة $f(x) = x^2 – 4x + 3$ قرب $x = 2$. قم بعمل جدول للمشتقات باستخدام أمر المشتقة في الآلة الحاسبة. كيف تتغير المشتقة حول $x = 2$؟

b) كرر ذلك من أجل الدالة التربيعية أخرى $f(x) = 1 + 5x – x^2$ بالقرب من $x = 2.5$

c) قم بمعاينة مشتقات دالة تربيعية أخرى من اختيارك قرب نقطة التحول لها.

d) استخدم ملاحظاتك من a) وb) وجدول مشتقات $f(x) = x^3 + 2x^2 – 3x + 1$ من أجل إيجاد نقطتي تحول تقريبيتين للدالة. تحقق عن طريق رسم f(x).

5. a) أوجد المساحة بين المحور x والمنحنى المعطى بـ$f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x$ من $x = 0$ إلى $x = 1$، من $x = 1$ إلى $x = 2$ ومن $x = 0$ إلى $x = 2$. كيف يمكن مقارنة هذه المساحات؟

b) أوجد المساحة بين المحور x وبين المنحنى المعطى بالعلاقة $f(x) = x^3 – 6x^2 + 11x – 6$ ، من $x = 1$ إلى $x = 2$، ومن $x = 2$ إلى $x = 3$ ومن $x = 1$ إلى $x = 3$. كيف يمكن مقارنة هذه المساحات؟

6. يرتبط التفاضل والتكامل مع بعضها البعض كما سوف تدرسها في مكان ما في مقررك. تسمح لك الآلة الحاسبة باستكشاف بعضا من هذه العلاقات. للقيام بذلك، استخدم جدول القيم ClassWiz لإيجاد التكاملات التالية لعدة قيم لـ t، من أجل $t > 1$:

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx$$

لاحظ أنه عندما $t = 2$، يكون التكامل يساوي ln 2. ما هي الأنماط التي تلاحظها في نتائجك؟ استخدم الدالة الثانية في الجدول (وهي g(x)) من أجل التحقق من تنبؤاتك.

ملاحظات من أجل المعلمين

تسلط هذه الوحدة الضوء على الطريقة التي تقوم فيها الآلة الحاسبة ClassWiz بدعم الطلاب من أجل تعلم حساب التفاضل والتكامل، وبخاصة مبادئ اشتقاق الدوال، التكامل، النهايات، والاتصال. يجب أن يقوم الطلاب بقراءة نص هذه الوحدة وهو الأمر الذي سوف يساعدهم على استخدام الحاسبة بشكل أفضل من أجل التعامل مع مختلف عمليات حساب التفاضل والتكامل. وبينما من الأفضل إكمال التمارين من قبل الطلاب فرديا من أجل تطويرهم لخبرة في التعامل مع الآلة الحاسبة، من الجيد أيضا للطلاب القيام بنشاطات مع زميل لهم لكي يتمكنوا من مناقشة الأفكار مع بعضهم البعض.

الإجابات إلى التمارين

1. انقطاع قفزة عند $x = 0.8$.   2. يتغير الجدول بمقدار 2 مع تزايد x بمقدار 1؛ التفاضل هو 2.

3. a) 6   b) 16   c) -5/49   d) -2/9   e) ¼

4. a) 0   b) 5/2   5. -1، 0، 1   b) -1، 0، 1

6. a) 1/3   b) 6   c) 32/3   d) 125/12   e) 63/4 و-16/3.

7. a) 253/12 (63/4+ 16/3) أو استخدم دالة القيمة المطلقة ، (c) يظهر الجدول الجذور عند -1، 2 و 4القيمة العظمى $x = 0$ والقيمة الصغرى قرب $x = 3$.

نشاطات

1. يطرح هذا النشاط فكرة رئيسية وهي السلوك الخطي المحلي: معظم الدوال المتصلة هي خطية تقريبا في فترات صغيرة بشكل كافي. يحاكي هذا النشاط عملية التكبير على الرسم البياني. يكشف هذا المثال تقديرات متضمنة، ولكن سوف تظهر الفترات الأصغر وضوحا أكبر بإن التغير في قيم y هو ضعف التغير في قيم x. شجع الطلاب على تجربة دوال أخرى إضافة إلى رؤية أن النتائج ليست فقط متصلة بالدوال التربيعية.

2. سيسمح الاستخدام المتكرر والحذر للآلة الحاسبة للطلاب باستكشاف قيم الجدول للدالة ضمن فترات مختلفة لرؤية أين تحدث تقريبيا المساحة الصغرى للسطح، حيث يمكنهم القيام بذلك من دون معرفة كيفية العثور على المشتقات جبريا. وهذا سوف يسمح لهم بالاقتراب من $r = 1.5846$ سم لإعطاء $S \approx 47.33$ سم^2. اذا وجدوا مشتقة S باستخدام الآلة الحاسبة، سوف تكون مقتصرة على ثلاث خانات عشرية، ولكن تكون قادرا على رؤية أن $S'(1.584)$ هي سالبة و$S'(1.585)$ هي موجبة، ولكن كلاهما قريبة من الصفر. يجب أن يشكل هذا مناقشة جيدة في قاعة صف.

3. هدف هذا النشاط السماح للطلاب باستكشاف نموذج رياضي باستخدام مختلف ميزات الآلة الحاسبة لإيجاد كل من الدوال ومشتقاتها بكفاءة مع تفسير النتائج في السياق. [الإجابات: a) 100 شخص سنويا b) i) 575 , 600 , 575 ii) 50 ، 0 ، -50 iii) وصل أكبر تعداد لسكان 600 ومن ثم انخفض].

4. عبر وضع المشتقات في جدول، يجب على الطلاب أن يجدوا أن القطعين المكافئين تتغير إشارتي مشتقاتهما على جانبي نقاط التحول وإلى صفر عند نقطة التحول نفسها. يقترح هذا بأن عليهم البحث عن النقاط التى تكون عندها المشتقات تساوي صفر وهذا هو مفتاح إيجاد نقاط التحول من أجل الدوال مثل تلك في الفقرة c). [الإجابات: a) $f'(x)$ تتغير من السالب إلى الموجب عند $x = 2$، و $f'(2) = 0$. b) $f'(x)$ تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = 2.5$ و $f'(2.5) = 0$ d) نقاط التحول هي $x \approx -1.87$ و $x \approx 0.54$]

5. يختص هذا النشاط بجعل الطلاب يدركون أن تفسير التكامل كمساحة يتطلب منهم فهم ما إذا كان الرسم البياني يقطع المحور x. إن الرسم البياني للدالتين يتقاطع مع المحور x عند النقاط المرشحة، بالتالي في كل حالة يجب إيجاد مساحتين منفصلتين أو إستخدام القيمة المطلقة داخل التكامل. يجب على الطلاب تحديد الجذور عبر التحليل أو عبر حل المعادلات المرتبطة بها (كما هو موضح في الوحدة 4). [الإجابات: a) ¼، ¼، ½ b) ¼، ¼، ½]

6. يتصل هذا النشاط بتطور مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية في الوحدة، ويتعلق بالخاصية العكسية بإن الدالة الأصلية لمقلوب الدالة هو الدالة اللوغاريتمية الطبيعية. بالتالي، فإن المنطقة تحت المنحنى هي $\ln t - \ln 1 = \ln t$ والتي هي نتيجة مفاجئة للغاية. قد يدرك بعض الطلاب التكامل عندما تكون $t = 2$ مع $\ln 2 = 0.6931...$. شجعهم على التحقق من عدد قليل من القيم من أجل t، بما في ذلك $t = e$. إذا لزم الأمر، اقترح عمل جدول $g(x) = \ln x$ في العمود الثاني إضافة للتكامل في العمود الأول.

CASIO COMPUTER CO.,LTD.
Tokyo, Japan

Printed in Japan
SA1509-1A